



## 1/ Présentation de l'épreuve

### Organisation pratique

L'épreuve orale de mathématiques de la session 2017 dure une heure et se compose de deux parties de durées égales : une première phase de préparation d'une durée d'une demi-heure et une seconde phase d'interrogation au tableau. Chaque sujet comporte deux exercices indépendants, portant sur des thèmes distincts du programme de première année ou de deuxième année de TSI. Les exercices proviennent d'une banque commune à l'ensemble des examinateurs. Ils sont conçus pour aborder plusieurs pans du programme. Un des deux exercices est guidé question par question et rédigé de façon progressive, afin que tout candidat sérieux puisse raisonnablement aborder cet exercice. Le deuxième exercice est plus ouvert et est l'occasion d'une présentation des pistes de recherche, des résultats et des expériences du candidat.

Pendant l'oral, l'interrogateur prend des notes à l'aide d'un ordinateur. Cela ne l'empêche aucunement d'être attentif au discours du candidat.

### Calculatrice

La calculatrice personnelle n'est autorisée dans aucun sujet de mathématiques pour cette session. Ce choix s'appuie sur une volonté d'égalité entre les candidats en termes de matériel numérique. De plus aucun exercice n'a nécessité l'utilisation d'un outil numérique. L'accent a été mis sur les connaissances du candidat et aucun calcul demandé n'exigeait une technicité extravagante.

### Notation et attendus

La notation des prestations des candidats porte à la fois sur leur maîtrise du cours, mais aussi sur les compétences mathématiques apparaissant dans les programmes de CPGE aussi bien en première année qu'en deuxième année.

Les examinateurs sont particulièrement attentifs à la connaissance des définitions fondamentales (par exemple valeur propre, convergence d'une série ou d'une intégrale, définition d'un noyau, d'une image, etc) et à la précision des énoncés des théorèmes principaux du cours. Il est bon de rappeler qu'un énoncé de théorème contient des hypothèses et un résultat avec des termes précis.

S'il est important de connaître des méthodes et de développer des automatismes permettant de répondre aux différentes questions posées, l'oral permet de tester systématiquement si ces méthodes reposent sur une compréhension solide des concepts.

Ces dispositions seront reconduites pour la session 2018.

## 2/ Remarques générales

La moyenne de l'épreuve est satisfaisante, et s'inscrit dans la lignée des années antérieures.

Le sérieux des candidats a été apprécié par les examinateurs : ponctualité, politesse, qualité de la présentation de l'exposé oral. La méconnaissance du cours rend extrêmement difficile un exposé cohérent. Sans connaissance de base, il ne peut y avoir de progression dans le traitement des questions.

Les candidats sont souvent enthousiastes à l'idée de faire un calcul ou d'appliquer une méthode bien précisée dans le cours. Il ne faut pas néanmoins que ceci soit fait au détriment de l'observation du problème posé.

L'exercice ouvert est le moment privilégié où une discussion peut s'instaurer entre le candidat et l'examineur. Sa finalité n'est pas l'obtention directe d'un résultat mais plutôt l'exposé d'une démarche, l'expression d'idées, la

compréhension du problème et les liens établis avec les connaissances du candidat. La présentation de calculs menés correctement et écrits en langage mathématique est un aspect non négligeable à prendre en compte par le candidat.

De plus, chaque exercice proposé forme un tout. La capacité de prendre en compte les résultats des questions précédentes ou des données intermédiaires est partie intégrante de l'évaluation de la prestation du candidat. Un futur élève ingénieur doit être en mesure d'articuler et de synthétiser des données afin de répondre à un problème, notamment quand chaque pas de démonstration est guidé.

### **Une épreuve orale**

La réussite de l'épreuve orale de Mathématiques passe par une gestion correcte de la préparation et du passage.

Le temps de préparation doit être consacré à la mise en relation de la demande de l'énoncé aux connaissances vues dans le cours, aussi bien en première année qu'en deuxième année. Ce moment ne doit pas être réduit à une rédaction comme il serait attendu lors d'un écrit classique de concours. Par ailleurs, la lecture des exercices doit être attentive et complète. S'il est difficile pour un étudiant de finir l'intégralité d'une planche lors de la préparation, il n'en reste pas moins vrai qu'une lecture complète est nécessaire pour comprendre le problème dans sa globalité.

Lors du passage, certains candidats tentent d'écrire le plus possible d'informations au tableau, oubliant en cela qu'il s'agit d'une épreuve orale. D'autres arrivent à un exposé synthétique de leurs idées permettant d'avancer plus rapidement dans les exercices. Dans tous les cas, les candidats seront interrogés sur les deux exercices.

Les courbes et les graphiques peuvent être de bons supports pour peu que les axes et les points remarquables soient indiqués, mais ils ne constituent pas une démonstration. Ceci est évidemment valable en analyse où des arguments d'intégration se transposent en argument sur des aires, ou des inégalités entre fonctions se traduisent par des propriétés sur leurs courbes. Ceci est aussi vrai en algèbre où plans et droites illustrent simplement des notions abstraites.

Les capacités du candidat à raisonner, à communiquer, à échanger, et à prendre en compte les remarques de l'examineur sont également évaluées. Il est donc judicieux de noter une indication donnée au tableau avec la rigueur inhérente aux mathématiques. De plus, l'examineur apporte une aide bienveillante et les remarques sont là pour favoriser la démarche de l'élève et non pas le contraindre. Il est dommage qu'un candidat ne prenne pas en compte les remarques de l'examineur.

Les examinateurs ont apprécié les prestations de candidat, se mettant en position de dialogue pour des questions non abordées durant la présentation et se montrant enthousiastes à chercher au tableau. L'épreuve orale donne l'occasion à l'examineur de vérifier les connaissances du candidat sur des domaines connexes à l'énoncé soumis, ainsi le tracé de courbes de référence, l'énoncé précis et exact d'un théorème, une série usuelle peuvent être demandés. Le deuxième exercice, par sa nature d'ouverture, nécessite une attention particulière sur les pistes indiquées par l'examineur et met en avant la capacité de conjecture et de mobilisation de connaissances du candidat. Les examinateurs ont évalué positivement toute démarche proposée ou tests démontrant la capacité de modélisation et d'appropriation de l'énoncé.

### **La gestion du tableau**

La gestion du tableau, elle aussi, est appréciée. La présentation doit être claire, ordonnée, et les expressions mathématiques doivent respecter la rigueur du formalisme. Il est avisé de faire ressortir les résultats obtenus au tableau afin de faciliter leur utilisation dans la suite du problème.

On rappelle aux candidats qu'ils doivent demander avant d'effacer le tableau. On leur conseille (lorsque le tableau de la salle d'interrogation le permet) de commencer par découper le tableau en deux parties et de s'imposer d'écrire petit, l'examineur étant situé à distance raisonnable.

Le tableau doit être lisible pour qu'une discussion ou une aide basée sur les résultats et recherches du candidat puisse s'instaurer.

### 3/ Remarques particulières en analyse

On observe encore des difficultés (parfois très sérieuses) sur les manipulations calculatoires de base : dérivées (surtout pour les fonctions composées), recherche de primitives (surtout de dérivées de fonctions composées), développements limités contenant partie régulière et reste.

Les hypothèses du théorème d'intégration par parties, du théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, de Dirichlet (pour les séries de Fourier) en particulier sont méconnues. Il est important de garder à l'idée que les théorèmes habituels de première année doivent être parfaitement maîtrisés.

Des difficultés perdurent sur les développements limités. Une méconnaissance des développements limités usuels pénalise l'avancée du candidat de manière générale et donne une impression négative de la prestation à l'examineur.

Les deux thématiques des séries numériques et des intégrales impropres présentent les mêmes problèmes : les élèves ont trop l'habitude d'utiliser les différents critères de convergence et connaissent trop peu la définition de cette convergence, pourtant essentielle. On peut ainsi régulièrement voir un candidat appliquer un théorème élaboré de convergence par équivalent (et l'appliquer correctement) puis ne pas connaître la définition de la somme partielle d'une série. Les différents théorèmes au programme sont importants et les méconnaître est évidemment sanctionné, mais les définitions de convergence d'une série ou d'intégrale généralisée sont évidemment fondamentales et doivent être maîtrisées.

Le critère de D'Alembert est un outil lié à l'étude de la convergence d'une série, son énoncé correct peut être demandé. Une confusion a été perceptible chez plusieurs candidats entre ce critère et l'étude du quotient de deux termes consécutifs d'une suite. Un quotient n'a par ailleurs d'existence qu'après avoir vérifié la non nullité du dénominateur.

Les suites récurrentes d'ordre 2 nécessitent une connaissance convenable des formules inhérentes ; faire le lien entre celles-ci et la résolution d'équations différentielles ne doit pas occulter les spécificités de chaque partie du programme. La récurrence a été malmenée également, certains candidats n'énonçant pas la propriété à démontrer de manière claire ou la supposant vraie pour tous les termes lors de l'hérédité.

La définition de suite géométrique n'est valable que pour des suites de nombres. Ce terme a été galvaudé lors de nombreux exercices mettant en jeu des matrices.

Les équations différentielles ont été bien traitées par les candidats sérieux et ayant appris leur cours. La structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle fait partie des attentes de l'oral de mathématiques. La résolution à l'aide d'une série entière exige la prise en compte du rayon de convergence.

Le calcul intégral a révélé des difficultés quant à la gestion d'un changement de variable, la transformation de l'élément différentiel a été malmenée quand celle-ci n'a pas été purement et simplement oubliée. Les changements de variables étant indiqués le plus souvent dans les énoncés, l'enjeu de la question réside donc dans la gestion du calcul indiqué.

Lors de l'étude d'une intégrale impropre, s'attacher aux valeurs où l'intégrale n'est pas définie ou aux bornes de l'intervalle d'intégration ne doit pas se faire au détriment d'une étude correcte et rigoureuse sur l'ensemble de l'intervalle d'intégration. De trop nombreux candidats ne prennent pas le soin de préciser le comportement ou la nature de l'intégrande.

### 4/ Remarques particulières en algèbre et en géométrie

Le vocabulaire lié aux surfaces a été le parent pauvre des exercices de géométrie, les termes comme plan et surface, ou courbe, droite et ligne, semblent interchangeable pour de nombreux candidats. Une représentation graphique est un support appréciable, utile et valorisé dans le cadre d'un exercice de géométrie, même si cela ne constitue pas une preuve. Peu de candidats y ont recours de manière naturelle sans la demande de l'examineur. Les candidats sont invités à faire des figures de taille adaptée, et de réfléchir au choix d'un système de coordonnées pertinent pour le problème posé.

Les exercices portant sur le gradient, les points critiques ou les plans tangents ont révélé des lacunes importantes quant à la représentation même de ces objets mathématiques. Certains candidats « dérivent » des équations de surface et n'introduisent aucune fonction pour légitimer la dérivation.

Le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit mixte doivent être sus non seulement comme formule mais également comme permettant de traduire une réalité mathématique. Des confusions sont à déplorer entre ces trois opérations vectorielles.

Les exercices de géométrie et d'algèbre nécessitent parfois la résolution de systèmes linéaires ou non linéaires. Une résolution réfléchie et menée de manière claire dans des calculs ne demandant pas une technicité hors propos est fortement appréciée par l'examineur. De même, la réalisation d'une division euclidienne peut être exigée.

Les énoncés proposés nécessitent au minima de connaître les définitions de matrices orthogonales, matrices semblables, matrices inversibles et matrices diagonalisables. La notion de trace et la propriété concernant l'égalité de trace entre deux matrices semblables sont bien connues. Il est cependant à déplorer des énoncés fantaisistes sur la trace, laissant entrevoir des approximations qui desservent grandement le candidat les énonçant.

La recherche de sous-espaces propres du point de vue calculatoire ne pose pas de difficulté en termes de méthode. Les justifications inhérentes à ces questions sont quant à elles beaucoup plus malmenées, de nombreux candidats font appel au théorème du rang dans des cas où celui-ci ne s'applique pas. De plus, le théorème spectral doit être énoncé de manière correcte et non pas comme une incantation.

Le calcul de déterminant est dans l'ensemble bien réalisé et l'écriture proposée au tableau est satisfaisante, la maîtrise en dimension  $n$  pose davantage de difficultés aux candidats les moins à l'aise.

Les questions portant sur les complexes ont révélé une absence de connaissance sur cette partie du programme et ont été clivantes en termes d'appréciation des prestations. Ne pas comprendre le terme « affixe » dans un énoncé ou ne connaître que l'écriture algébrique d'un nombre complexe sont des lacunes inacceptables pour un futur élève-ingénieur. L'absence de lien entre le plan complexe et les propriétés géométriques ou l'incapacité à exprimer des transformations géométriques ont été saillantes et donnent une très mauvaise image du travail fourni par le candidat.

L'étude des matrices de transformation a divisé la population des candidats entre ceux connaissant leur cours et ceux n'ayant qu'une idée très vague et imprécise des matrices orthogonales.

Les définitions d'endomorphismes et automorphismes sont bien connues par une large majorité des candidats.

Enfin, une notion importante et mal comprise est la notion de dimension. De très nombreux candidats savent chercher une base d'un sous-espace vectoriel (en tout cas une famille génératrice), puis compter les éléments pour trouver une dimension. Mais très peu perçoivent la notion de dimension en tant que concept, notamment en tant que nombre de degrés de liberté. C'est pourquoi on attend d'un candidat qu'il soit capable de donner directement la dimension par exemple de  $M_2(\mathbb{R})$  ou de  $\mathbb{R}_2[X]$ , non en pensant à son cours, mais en réfléchissant rapidement aux degrés de liberté associés. Connaître les dimensions des espaces vectoriels de matrices a posé de grandes difficultés à certains candidats, empêchant une progression sereine dans leur raisonnement.

Parmi les méthodes usuelles de l'algèbre linéaire, les techniques de réduction de matrices sont en général bien connues. L'obtention de la matrice d'un endomorphisme n'est pas systématiquement réalisée.

Les questions portant sur le produit scalaire n'ont posé aucun problème aux candidats connaissant leur cours.

Les exercices portant sur les courbes paramétrées ont mis en avant une mauvaise compréhension de la notion de tangente.

## 5/ Remarques particulières en probabilités

Une des plus grandes difficultés relevées est la difficulté de compréhension du texte présenté. Certains candidats se contentent de proposer une loi du cours sans prendre garde de justifier le choix de leur réponse, voire l'adéquation de leur réponse au problème posé.

Il est à noter également que les lois usuelles ne sont pas connues, ou alors de manière trop approximative pour permettre de répondre aux attentes de l'énoncé. Ainsi la loi binomiale est parfois citée sans préciser les valeurs de ses paramètres. De même, un effort devrait être porté sur la connaissance et la notation de l'univers image d'une loi, première donnée essentielle à une présentation plus calculatoire de la loi.

La formule des probabilités totales est trop souvent écrite directement avec des probabilités conditionnelles et la notion fondamentale de système complet d'événements n'est pas bien maîtrisée ou alors non citée de manière automatique.

On souhaiterait que les candidats fassent un effort de réécriture des événements (à l'aide d'intersections, d'unions, de complémentaires) avant de se lancer dans le calcul des probabilités. La confusion entre événement et probabilité est également à déplorer.

## 6/ Conseils aux futurs candidats

Lors de la remise du sujet les examinateurs recommandent de lire une première fois la totalité de l'énoncé et de partager équitablement le temps de préparation afin d'aborder les deux exercices. Dans la préparation de chaque exercice, il peut être judicieux de réfléchir, avant tout calcul, à la stratégie que l'on abordera.

Lors de la présentation orale, les candidats peuvent admettre des questions. Les examinateurs y reviendront éventuellement en fin d'exposé. Par ailleurs il est inutile d'attendre l'assentiment de l'examineur après chaque question. Rappelons qu'il n'est pas nécessaire de terminer les deux exercices pour obtenir une très bonne note. Enfin, les qualités de communication du candidat seront valorisées : clarté de l'expression et dynamisme de la présentation y contribuent évidemment.

Un exposé succinct mais précis des résultats obtenus est attendu. Dans cet esprit, il est inutile de recopier le détail des calculs au tableau. Il convient d'en indiquer les grandes lignes ainsi que le résultat final. L'organisation des calculs est primordiale, que ce soit pour la recherche d'une erreur ou l'appréciation de la prestation du candidat.

Les théorèmes utilisés seront cités et leurs hypothèses vérifiées avec soin. Il pourra aussi être judicieux d'illustrer ses propos par des figures en géométrie, ou des graphes de fonctions, ou un cercle trigonométrique lorsque que l'occasion se présente.

Dans le cas où une question viendrait à poser problème, il est recommandé d'indiquer toutes les pistes explorées, ce qui permettra d'engager un dialogue avec l'examineur. Rappelons à cet égard que les questions (ou les remarques) de l'examineur ont pour but d'aider les candidats à s'interroger sur la pertinence de leurs résultats et à les remettre sur une bonne voie. En aucun cas, les remarques de l'examineur ne visent à déstabiliser le candidat : il s'agit au contraire de le conduire à se poser les bonnes questions.

Globalement, les prestations des candidats sont assez satisfaisantes, tant sur le fond que sur la forme. Les examinateurs félicitent les candidats pour le sérieux de leur travail pendant ces deux ou trois ans de préparation, et souhaitent bon courage aux futurs candidats.