CONCOURS COMMUN INP
FILIÈRE MP - FILIÈRE MPI

BANQUE
ÉPREUVE ORALE
DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2026

avec corrigés

Dernière mise à jour : le 01/10/2025

Introduction

L'épreuve orale de mathématiques du CCINP, filière MP et filière MPI, se déroule de la manière suivante :
— 25mn de préparation sur table.
— 25mn de passage à l'oral.

Chaque sujet proposé est constitué de deux exercices :
— un exercice sur 8 points issu de la banque publique accessible sur le site `https://www.concours-commun-inp.fr/fr/index.html`
— un exercice sur 12 points.

Les deux exercices proposés portent sur des domaines différents.

Ce document contient les **112 exercices de la banque pour la session 2026** :
— 58 exercices d'analyse (exercice 1 à exercice 58).
— 36 exercices d'algèbre (exercice 59 à exercice 94).
— 18 exercices de probabilités (exercice 95 à exercice 112).

Dans l'optique d'aider les futurs candidats à se préparer au mieux aux oraux du CCINP, chaque exercice de la banque est proposé, dans ce document, avec un corrigé.

Il se peut que des mises à jour aient lieu en cours d'année scolaire.
Cela dit, il ne s'agira, si tel est le cas, que de mises à jour mineures : reformulation de certaines questions pour plus de clarté, relevé d'éventuelles erreurs, suppression éventuelle de questions ou d'exercices.
Nous vous conseillons donc de vérifier, en cours d'année, en vous connectant sur le site :
`https://www.concours-commun-inp.fr/fr/index.html`
Si une nouvelle version a été mise en ligne, la date de la dernière mise à jour se trouvera en haut de chaque page.
Si tel est le cas, les exercices concernés seront signalés dans le présent document, page 3.

Remerciements à David DELAUNAY pour l'autorisation de libre utilisation du fichier source de ses corrigés des exercices de l'ancienne banque, diffusés sur son site `http://mp.cpgedupuydelome.fr`

NB : la présente banque intègre des éléments issus des publications suivantes :

- A. Antibi, L. d'Estampes et interrogateurs, Banque d'exercices de mathématiques pour le programme 2003-2014 des oraux CCP-MP, *Éd. Ress. Pédag. Ouv. INPT*, **0701** (2013) 120 exercices.
  `http://pedagotech.inp-toulouse.fr/130701`
- D. Delaunay, Prépas Dupuy de Lôme, cours et exercices corrigés MPSI - MP, 2014.
  `http://mp.cpgedupuydelome.fr`

L'équipe des examinateurs de l'oral de mathématiques du CCINP, filière MP et filière MPI.

Contact : Valérie BELLECAVE, coordonnatrice des oraux de mathématiques du CCINP, filière MP et filière MPI.
vbellecave@gmail.com

MISES À JOUR :

Les mises à jour signalées sont des mises à jour par rapport à la dernière version publiée sur le site du concours commun INP, en date du 24/01/25.

Mise à jour du 01/09/25

EXERCICE 2 :
changement de barème.

EXERCICE 12 :
corrigé question 2.
Pour apporter des précisions sur le fait que la convergence uniforme vers g entraine la convergence simple vers la même fonction g :
remplacé par :

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Supposons que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f.
D'après le cours, $f = g$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue en 1 .
Donc, d'après la question 1., g est continue en 1.
Abusrde car g est discontinue en 1.

Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
EXERCICE 13 :
Corrigé question 4.a :
$f^{-1}(1)$ remplacé par $f^{-1}(\{1\})$.
Corrigé question 4.b. ligne 4.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $||X^n||_1 = 1$, donc (X_n) est une suite à valeurs dans S.
remplacé par :
donc (X^n) est une suite à valeurs dans S.

EXERCICE 14 :
Enoncé question 2. :
Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
Remplacé par :
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$.
On suppose que que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
Prouver , **en utlisant 1.,** que $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

EXERCICE 18 :
Corrigé question 2.c :
convergence simple précisée avant la majoration du reste.

EXERCICE 19 :
Enoncé question 1.(a) :
Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
remplacé par :
Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation d'une série de fonctions, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
Enoncé question 2.(b). :
Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.

remplacé par :
Rappeler les résultats sur le produit de Cauchy de deux séries entières.

EXERCICE 20 et EXERCICE 21 :
Corrigé question 1.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :
$R = \sup\{r \geqslant 0 \,/ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

On peut aussi définir le rayon de convergence de la manière suivante :

$\exists\,!\, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Pour une série entière de la variable réelle, la définition est identique.

remplacé par :

Définition :
Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :
$R = \sup\{r \geqslant 0 \,/ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

Corollaire :

$\exists\,!\, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

EXERCICE 32 :
Corrigé question 1.
Pour une meilleur vision de l'aspect analyse-synthèse, remplacé par :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
Pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}.$$

Supposons que S soit solution de l'équation différentielle proposée sur $\left]-R, R\right[$.
On a donc que $\forall x \in \left]-R, R\right[$:

$$x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1}\right) x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on a donc que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$.
C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1) a_n$.
Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.
De plus, le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1.

Ainsi, $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_1 n x^n = a_1 x \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = a_1 x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$.
Réciproquement,
Soit $a_1 \in \mathbb{R}$.
On vérifie que $x \mapsto \dfrac{a_1 x}{(1-x)^2}$ est solution de l'équation différentielle proposée sur $\left]-1, 1\right[$.

EXERCICE 35 :
changement de barème.

EXERCICE 42 :

Corrigé question 3. :
$]0,+\infty]$ changé en $]0,+\infty[$.

EXERCICE 49 :
Corrigé question 2.a. :
Rajout de :
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

EXERCICE 59 :
corrigé question 1. :
Démontrer que f est bijectif de deux manières :
changé en :
Démontrer que f est bijectif de E dans E de deux manières :

EXERCICE 66 :
Enoncé question 3 :
question supprimée et barème adapté.

EXERCICE 68 :
Enoncé et corrigé 1.b et 1.c :
Les deux questions sont fusionnées en une seule et le corrigé adapté.

EXERCICE 75
Corrigé question 2. :
Complété donc remplacé par :
$\chi_A(X)$ étant scindé, A est trigonalisable.
$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
On pose $v_1 = (2,-1)$.
On a déjà $f(v_1) = v_1$.

On pose $v_2 = (-1,0)$.
$A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
donc $f(v_2) = v_1 + v_2$.

De plus, v_1 et v_2 sont non colinéaires donc la famille $v = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Notons T la matrice de f dans la base v.
Ainsi :
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 90 :
Barème modifié

EXERCICE 94 :
Corrgié question 3.b :
Dans le premier système, un égal remplacé par $\equiv$.

EXERCICE 106 :
Corrigé question 1. :
remplcé par :
$(U,V)(\Omega) = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } m \geqslant n\right\}$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
Premier cas : si m=n
$P((U=m)\cap(V=n)) = P((X=n)\cap(Y=n)) = P(X=n)P(Y=n)$ car X et Y sont indépendantes.
Donc $P((U=m)\cap(V=n)) = p^2q^{2n}$.
Deuxième cas : si m>n
$P((U=m)\cap(V=n)) = P([(X=m)\cap(Y=n)]\cup[(X=n)\cap(Y=m)])$
Les événements $((X=m)\cap(Y=n))$ et $((X=n)\cap(Y=m))$ sont incompatibles donc :
$P((U=m)\cap(V=n)) = P\left((X=m)\cap(Y=n)\right) + P\left((X=n)\cap(Y=m)\right)$.
Or les variables X et Y suivent la même loi et sont indépendantes donc :

$P((U=m)\cap(V=n)) = 2P(X=m)P(Y=n) = 2p^2q^{n+m}$.
Troisième cas : si m<n
$P((U=m)\cap(V=n)) = 0$.

Bilan : $P((U=m)\cap(V=n)) = \begin{cases} p^2q^{2n} & \text{si } m=n \\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m>n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Mise à jour du 01/10/25

EXERCICE 68 :
Enoncé version avec corrigé question 1. :
"de quatre manières" en "de trois manières".
Enoncé version sans corrigé :
question 1. c. supprimée (en utilisant le rang).

BANQUE ANALYSE

EXERCICE 1 analyse

Énoncé exercice 1

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Les normes $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $||\ ||_\infty$.
   (a) Soit $u : \left\{\begin{array}{lll} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}\right.$
   Prouver que u est une application continue sur E.
   (b) On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
   Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $||\ ||_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $||\ ||_1$.
   Soit $c : \left\{\begin{array}{lll} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right.$

   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \left\{\begin{array}{lll} nx & \text{si} & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si} & \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{array}\right.$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $||f_n - c||_1$.
   (b) On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
   On note $\bar{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c \in \bar{F}$.
   F est-elle une partie fermée de E pour la norme $||\ ||_1$?

Corrigé exercice 1

1. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^n$.
   (f_n) est une suite à valeurs dans E et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{||f_n||_\infty}{||f_n||_1} = \dfrac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||f_n||_\infty}{||f_n||_1} = +\infty$.

   Donc $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ ne sont pas équivalentes.
2. (a) u est clairement linéaire.
   De plus, $\forall f \in E$, $|u(f)| = |f(0)| \leqslant 1.||f||_\infty$.
   Donc u est continue sur E muni de la norme $||\ ||_\infty$.
   (b) On remarque que $F = u^{-1}(\{0\})$.
   De plus, $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
   Donc F est l'image réciproque d'un fermé, par une application continue sur E, muni de la norme $||\ ||_\infty$.
   Donc F est un fermé de E pour la norme $||\ ||_\infty$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $||f_n - c||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t) - c(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - c(t)|dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 |f_n(t) - c(t)|dt$.
   Or, $\forall t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $f_n(t) - c(t) = 0$.
   Donc $||f_n - c||_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)\, dt$.
   Donc $||f_n - c||_1 = \dfrac{1}{2n}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{n}, 1\right]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^-} f_n(x) = 1 = f_n(\frac{1}{n})$ donc f_n continue en $\frac{1}{n}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, 1]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$.

Donc (f_n) est une suite à valeurs dans F.

Remarque : le tracé de la courbe de f_n peut suffire à justifier la continuité de f_n.

D'après 3.(a), $||f_n - c||_1 = \dfrac{1}{2n}$.
Donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} ||f_n - c||_1 = 0$.

Donc la suite (f_n), à valeurs dans F, converge vers c (au sens de la norme $||\ ||_1$).
Donc $c \in \overline{F}$.
Or $c \notin F$ (car $c(0) = 1 \neq 0$).
Donc $F \neq \overline{F}$.
Donc F n'est pas un fermé pour la norme $||\ ||_1$.

EXERCICE 2 analyse

Énoncé exercice 2

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Corrigé exercice 2

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve :
   $f(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2}$.
2. D'après le cours, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ sont développables en série entière à l'origine.

   De plus, on a $\forall\, x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

   Et, $\forall\, x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$ (obtenu par dérivation du développement précédent).
   On en déduit que f est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière.
   Et $\forall\, x \in]-1, 1[$, $f(x) = 3 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + 4 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$.

   C'est-à-dire : $\forall\, x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (4n+7)(-1)^n x^n$.

   Notons D le domaine de validité du développement en série entière de f.
   D'après ce qui précéde, $]-1, 1[\subset D$.

   Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum (4n+7)(-1)^n x^n$.

   D'après ce qui précéde $R \geqslant 1$.

   Posons, pour tout entier naturel n, $a_n = (4n+7)(-1)^n$.

   Pour $x = 1$ et $x = -1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n x^n| = +\infty$ donc $\sum (4n+7)(-1)^n x^n$ diverge grossièrement.

   Donc $R \leqslant 1$, $1 \notin D$ et $-1 \notin D$.

   On en déduit que $D =]-1, 1[$.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   D'après le cours, g est de classe C^∞ sur $]-R, R[$.
   De plus, $\forall\, x \in]-R, R[$,

   $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

   $g''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$.

et, par récurrence, on a :

$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \left]-R, R\right[,\ g^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)...(n+p)a_{n+p}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}x^n.$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(0) = p!a_p$.

C'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}$.

(b) f est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0, $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{3}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + o(x^3)$. (*)

Or, d'après 3.(a), pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ est aussi la valeur du $p^{\text{ième}}$ coefficient du développement en série entière de f.

Donc, d'après 2., pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} = (4p+7)(-1)^p$. (**)

Ainsi, d'après (*) et (**), au voisinage de 0, $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{3}(4p+7)(-1)^p x^p + o(x^3)$.

C'est-à-dire, au voisinage de 0, $f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$.

EXERCICE 3 analyse

Énoncé exercice 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Corrigé exercice 3

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g^{(k)}(x) = 2^k\mathrm{e}^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$:
   $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\mathrm{e}^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!\mathrm{e}^{2x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$
3. Notons (P_n) la propriété :
   Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
   $\forall\, x \in I$, $(fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
   Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.
   La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).

   Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
   Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall\, x \in I$, $(fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
   Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
   Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et :
   $\forall\, x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right)$.
   En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient : $\forall\, x \in I$, $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
   C'est-à-dire
   $$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + \binom{n}{0}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \binom{n}{n}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x).$$
   Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1} = \dbinom{n+1}{k}$.
   On remarque également que $\dbinom{n}{0} = 1 = \dbinom{n+1}{0}$ et $\dbinom{n}{n} = 1 = \dbinom{n+1}{n+1}$.
   On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
   Donc (P_{n+1}) est vraie.

EXERCICE 4 analyse

Énoncé exercice 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \,]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Corrigé exercice 4

1. Théorème des accroissements finis :
   Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
   Alors $\exists\, c \in \,]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
2. On pose $l = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
   Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et x_0+h, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et x_0+h tel que $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(c_h)h$.
   Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$.
   Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) = \lim\limits_{h\to 0} f'(c_h) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l$.
   On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.
3. La fonction g est clairement continue et dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|g(x)| \leqslant x^2$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g est continue en 0.

   g est également dérivable en 0 car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}\left(g(x) - g(0)\right) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x\neq 0}} h \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ car $|x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)| \leqslant |x|$.
   Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

   Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Cependant, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $g'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   $2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (car $|2x\sin(\dfrac{1}{x})| \leqslant 2|x|$), mais $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
   Donc g' n'a pas de limite en 0.

EXERCICE 5 analyse

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant 1$ donc $(\ln n)^{\alpha} \leqslant 1$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge.
   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   Soit $n \geqslant 3$.
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc
   $\forall k \in [\![3, n]\!]$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$
   donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$
   C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$
   f étant positive, on peut donc écrire dans $[0, +\infty]$ l'inégalité
   $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$
   de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,
   autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

   Puisque $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1$.
   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Au voisinage de $+\infty$,
$\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right)=2\ln n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=2\ln n+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln\left(n^2+n\right)\underset{+\infty}{\sim}2\ln n$.

Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\underset{+\infty}{\sim}1$, on en déduit que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}}{8}\times\dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$ converge.

EXERCICE 6 analyse

Énoncé exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{n!}{n^n}$?

Corrigé exercice 6

1. Par hypothèse : $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}/\ \forall n\geqslant N,\ |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\varepsilon.\qquad(1)$

   Prenons $\varepsilon=\dfrac{1-l}{2}$.
   Fixons un entier N vérifiant (1).
   Alors $\forall\,n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Longrightarrow|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\dfrac{1-l}{2}$.
   Et donc, $\forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1+l}{2}$.
   On pose $q=\dfrac{1+l}{2}$. On a donc $q\in\,]0,1[$.
   On a alors $\forall n\geqslant N,\ u_{n+1}\leqslant qu_n$.
   On en déduit, par récurrence, que $\forall n\geqslant N,\ u_n\leqslant q^{n-N}u_N$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant N}q^{n-N}u_N=u_Nq^{-N}\sum\limits_{n\geqslant N}q^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant N}q^n$ converge car $q\in\,]0,1[$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

   $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.
   Or $-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\underset{+\infty}{\sim}-1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{e}^{-1}<1$.
   Donc, d'après 1., la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 7 analyse

Énoncé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
   Remarque 1 : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Corrigé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Par hypothèse, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
   De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
   Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. (1)
   Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)
   On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Et donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.
   (b) On suppose que (v_n) est positive.
   En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n > 0$.

   De plus, on a prouvé, dans 1.(a), que :
   $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)

   On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow v_n > 0$.
   Donc on a aussi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow u_n > 0$.

   D'après (*), $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{3}{2}$. (**)

   Premier cas : Si $\sum v_n$ converge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $u_n \leqslant \dfrac{3}{2} v_n$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
   Deuxième cas : Si $\sum v_n$ diverge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $\dfrac{1}{2} v_n \leqslant u_n$.

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

2. On pose $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

$|u_n| = \dfrac{\sqrt{2} \ln n \sin(\dfrac{1}{n})}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

De plus $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$

On a $n^{\frac{5}{4}} v_n = \dfrac{\sqrt{2}\ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0$. On en déduit que $\sum v_n$ converge.

D'après 1., $\sum\limits_{n \geqslant 2} |u_n|$ converge.

Donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge absolument.

De plus, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

EXERCICE 8 analyse

Énoncé exercice 8

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Corrigé exercice 8

1. (a) $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$, donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   De même $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geqslant 0$, donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$.
   On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc elles convergent et ce vers une même limite.
   Comme $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrent l'ensemble des termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.
   Ce qui signifie que la série $\sum (-1)^k u_k$ converge.

   (b) Le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

2. On pose : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   On a alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

   Si $x < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

   Si $x \geqslant 0$, alors $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

   Donc d'après 1.(a), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   Remarque : pour $x > 0$, on a aussi convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

   En effet, pour tout réel $x > 0$, $n^2 |f_n(x)| = n\mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|f_n(x)| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   (b) Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, on peut poser $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

   Alors, comme, $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit, d'après 1.(b), que :

$\forall\, x \in [0,+\infty[$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$.

Et donc $\forall\, x \in [0,+\infty[$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

Donc $||R_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

C'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

EXERCICE 9 analyse

Énoncé exercice 9

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Corrigé exercice 9

Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée on pose : $||f||_{\infty,X} = \sup\limits_{t\in X}[f(t)|$

1. Soit $g_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$.
   Dire que (g_n) converge uniformément vers g sur X signifie que :

$$\forall \varepsilon>0, \exists\, N\in\mathbb{N}/\forall\, n\in\mathbb{N}, n\geqslant N \Longrightarrow \forall\, x\in X, |g_n(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon.$$

   Ou encore :
   (g_n) converge uniformément vers g sur $X \iff \exists\, n_0\in\mathbb{N}/\forall n\geqslant n_0$, g_n-g est bornée sur X et $\lim\limits_{n\to+\infty}||g_n-g||_{\infty,X}=0$.

2. (a) On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   Soit $x\in\mathbb{R}$.
   Si $x=0$, alors $f_n(0)=\dfrac{n+2}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0)=1$.
   Si $x\neq0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.
   En effet, $|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-nx^2}|\cos(\sqrt{n}x)|$ et $0\leqslant \mathrm{e}^{-nx^2}|\cos(\sqrt{n}x)|\leqslant \mathrm{e}^{-nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\neq0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et f non continue en 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.
   (c) Soit $a>0$.
   On a : $\forall\, x\in[a,+\infty[$, $|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)|\leqslant \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2}$ (majoration indépendante de x).
   Donc $||f_n-f||_{\infty,[a,+\infty[}\leqslant \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2}$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2}=0$ (car $\dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-na^2}$).
   Donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$.
   (d) On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est bornée sur $]0,+\infty[$ car pour tout $x\in]0,+\infty[$, $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{n+2}{n+1}\leqslant 2$.
   D'autre part, f est bornée sur $]0,+\infty[$, donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $||f_n-f]]_{\infty,]0,+\infty[}$ existe.
   On a $|f_n(\dfrac{1}{\sqrt{n}})-f(\dfrac{1}{\sqrt{n}})|=\dfrac{(n+2)\mathrm{e}^{-1}\cos1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(\dfrac{1}{\sqrt{n}})-f(\dfrac{1}{\sqrt{n}})|=\mathrm{e}^{-1}\cos1\neq0$.
   Or $||f_n-f]]_{\infty,]0,+\infty[}\geqslant|f_n(\dfrac{1}{\sqrt{n}})-f(\dfrac{1}{\sqrt{n}})|$, donc $||f_n-f]]_{\infty,]0,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
   Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0,+\infty[$.

EXERCICE 10 analyse

Énoncé exercice 10

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.

Corrigé exercice 10

1. Pour $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$.

   On a $\forall\, x \in [0,1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2+1)\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x)}{n+x}$,
   et donc : $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$ (majoration indépendante de x).
   Donc $||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\mathrm{e}}{n} = 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Par convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0,1]$, on peut intervertir limite et intégrale.
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
   Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 3$.

EXERCICE 11 analyse

Énoncé exercice 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Corrigé exercice 11

1. Par contraposée :
   si (f_n) converge uniformément vers f alors :
   il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ existe et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.
   C'est-à-dire la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$.
   Si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ car $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2x^2}$.
   Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
   (b) Soit $a > 0$.
   $\forall\, x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+n^2a^2}$ (majoration indépendante de x).
   Donc $||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{1}{1+n^2a^2}$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n^2a^2} = 0$.
   On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a, +\infty[$.

   On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in\,]0, +\infty[$ et $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \dfrac{1}{1+\dfrac{\pi^2}{4}}$ qui ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
   On en déduit, d'après 1., que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 12 analyse

Énoncé exercice 12

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Corrigé exercice 12

1. Soit $x_0 \in [a, b]$.
   Prouvons que f est continue en x_0.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Par convergence uniforme, il existe un entier N tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow (\forall x \in [a, b]\,, |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon)$.
   En particulier pour $n = N$, on a $\forall x \in [a, b]\,, |f(x) - f_N(x)| \leqslant \varepsilon.$ (*)

   Or la fonction f_N est continue en x_0 donc $\exists\, \alpha > 0$ tel que :
   $\forall x \in [a, b]\,, |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| \leqslant \varepsilon.$ (**)

   D'après l'inégalité triangulaire, $\forall\, x \in [a, b]$,
   $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$.

   Alors d'après (*) et (**),
   $\forall x \in [a, b]\,, |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant 3\varepsilon$.

   On en déduit que f est continue en x_0.
2. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

   Supposons que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f.
   D'après le cours, $f = g$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue en 1 .
   Donc, d'après la question 1., g est continue en 1.
   Abusrde car g est discontinue en 1.

   Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

EXERCICE 13 analyse

Énoncé exercice 13

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $|| \, ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de E par : $||P||_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \; / \; ||P||_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
   $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Corrigé exercice 13

1. Une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, || \, ||)$ est une partie compacte si et seulement si pour toute suite (x_n) à valeurs dans A on peut extraire une sous-suite qui converge dans A.
   C'est-à-dire A est une partie compacte si et seulement pour toute suite (x_n) à valeurs dans A il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $l \in A$.

   Remarque : $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ étant strictement croissante, on a, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.
2. Soit $(E, || \, ||)$ un espace vectoriel normé.
   Soit A une partie compacte de E.
   Montrons que A est une partie fermée de E.
   C'est-à-dire montrons que toute suite à valeurs dans A qui converge, converge dans A.
   Soit (x_n) une suite à valeurs dans A telle que (x_n) converge vers l.
   A est une partie compacte donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $l' \in A$. Or, (x_n) converge vers l donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers l (sous-suite de (x_n)).
   Par unicité de la limite, $l' = l$.
   Or, $l' \in A$,donc $l \in A$.
3. Soit $(E, || \, ||)$ un espace vectoriel normé.

   Rappel : Soit B une partie de E.
   B est bornée si et seulement si $\exists \, M \in \mathbb{R} \; / \; \forall x \in B, ||x|| \leqslant M$.

   Soit A une partie compacte de E.
   Montrons que A est une partie bornée de E.
   Raisonnons par l'absurde.
   Supposons que A soit non bornée.
   C'est-à-dire, $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \, x \in A \; / \; ||x|| > M$.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in A \; / \; ||x_n|| > n \quad (*)$
   (x_n) est une suite à valeurs dans A et A est une partie compacte de E donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $l \in A$.
   Donc, d'après $(*)$, $\forall n \in \mathbb{N}, ||x_{\varphi(n)}|| > \varphi(n)$.
   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $||x_{\varphi(n)}|| > n$.
   Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} ||x_{\varphi(n)}|| = +\infty$.
   Absurde car $(x_{\varphi(n)})$ converge donc $(x_{\varphi(n)})$ est bornée.
4. Posons $S = S(0,1)$.

(a) $\forall x \in S, ||x|| = 1$ donc S est bornée.

Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ||x|| \end{array}$
f est continue sur E.
Or, $S = f^{-1}(\{1\})$ et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc S est une partie fermée de E, en tant qu'image réciproque par une application continue d'un fermé.

(b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$.
$||X^n - X^m||_1 = 2$.
Supposons que S soit une partie compacte de E.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $||X^n||_1 = 1$, donc (X^n) est une suite à valeurs dans S.
Or, S est une partie compacte de E, donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(X^{\varphi(n)}\right)$ converge vers $l \in S$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} ||X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}||_1 = ||l - l|| = 0$.
Contredit le fait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $||X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}||_1 = 2$.
Donc S est non compact.

EXERCICE 14 analyse

Énoncé exercice 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n\,(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$.
   On suppose que que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
   Prouver , **en utilisant 1.,** que $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Corrigé exercice 14

1. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$.
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est continue sur le segment $[a, b]$.
   On pose alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.
   On a :
   $\left|\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x$.
   Or, $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant ||f_n - f||_\infty$.
   Donc $\left|\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b ||f_n - f||_\infty \mathrm{d}x = (b - a)\,\|f_n - f\|_\infty$. (*)
   Or (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   Donc d'après (*), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, donc converge simplement sur $[a, b]$.
   On pose alors, également, $\forall x \in [a, b]$, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ signifie que (S_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers S.
   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[a, b]$, car S_n est une somme finie de fonctions continues.
   On en déduit que S est continue sur $[a, b]$.
   Et d'après 1., $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.
   Or $\displaystyle\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$ car il s'agit d'une somme finie.
   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Ce qui signifie que $\sum \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Bilan : La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont continues sur $[a,b]$ permet d' intégrer terme à terme, c'est-à-dire : $\int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. La série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence $R=1$ donc cette série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur le compact $\left[0,\frac{1}{2}\right] \subset \left]-1,1\right[$.

   De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

   On en déduit alors, en utilisant 2., que : $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}$.

EXERCICE 15 analyse

Énoncé exercice 15

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Corrigé exercice 15

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Si f_n est bornée sur X alors on pose $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{t \in X} |f_n(t)|$.
   $\sum f_n$ converge normalement sur $X \iff \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant n_0$, f_n est bornée sur X et $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \|f_n\|_\infty$ converge.

   On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $X \iff$ la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur X.
2. On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur X. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0$, f_n est bornée sur X.
   La série numérique $\sum\limits_{n \geq n_0} \|f_n\|_\infty$ converge.
   Or, $\forall\, x \in X, \forall\, n \geq n_0$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$.
   Donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente, puisque les fonctions f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X.

   On peut donc poser $\forall\, x \in X, \forall\, n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

   $\forall\, x \in X, \forall\, n \geq n_0, \forall\, N \in \mathbb{N}, N \geqslant n+1 \Longrightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{N} f_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{N} |f_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{N} \|f_k\|_\infty$.
   Alors, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :
   $\forall\, x \in X, \forall n \geq n_0$, $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. (majoration indépendante de x)

   Donc $\forall\, n \geq n_0$, $\|R_n\|_\infty \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$.

   Or $\sum f_n$ converge normalement sur X donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty = 0$.

   On en déduit alors que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur X.
   Donc par caractérisation, $\sum f_n$ converge uniformément sur X.
3. On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n^2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

On en déduit que série entière $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
Cette série entière converge donc normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
En particulier, cette série entière converge normalement et donc uniformément, d'après 2., sur tout disque de centre 0 et de rayon R.

Autre méthode sans utiliser les séries entières :
On pose $f_n(z) = \dfrac{n^2}{n!} z^n$ et on note D le disque fermé de centre 0 et de rayon R.
$\forall z \in D,\ |f_n(z)| = \dfrac{n^2}{n!}|z|^n \leq \dfrac{n^2}{n!} R^n$ et ce majorant est atteint pour $z = R \in D$.
On a donc $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{z\in D} |f_n(z)| = \dfrac{n^2}{n!} R^n$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\|f_{n+1}\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = \dfrac{n+1}{n^2} R \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$.
D'après la règle de d'Alembert, on en déduit que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur D.

EXERCICE 16 analyse

Énoncé exercice 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
   (b) En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.

Corrigé exercice 16

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}$.
   Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.

   On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.
   La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.
2. On a $S(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

   Or $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n+1) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n$.

   Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $S(1)$.

   Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

   Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$.

   On a donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n+1) - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1) + \mathcal{O}(1)$ et donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

   En remarquant que $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ on voit que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   On en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. On a déjà vu que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall\, x \in [0,1]$, $u_n'(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$.

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$. (majoration indépendante de x).

On en déduit que $\|u_n'\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.

On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ Et on a : $\forall\, x \in [0;1]$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right)$.

Or $\sum\limits_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} -1$.

Donc $S'(1) = -1$.

EXERCICE 17 analyse

Énoncé exercice 17

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

Corrigé exercice 17

1. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur A.
   On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur A.
   On pose alors, $\forall\, x \in A$, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur A, c'est-à-dire (S_n) converge uniformément vers S sur A, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} ||S_n - S||_\infty = 0$, avec $||S_n - S||_\infty = \sup\limits_{x\in A} |S_n(x) - S(x)|$ qui existe à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
   On a $\forall\, n \geq n_0$, $\forall\, x \in A$, $|f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leqslant |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)|$.
   Donc $\forall\, n \geq n_0$, $\forall\, x \in A$, $|f_n(x)| \leqslant ||S_n - S||_\infty + ||S_{n-1} - S||_\infty$ (majoration indépendante de x).
   Donc $\forall\, n \geq n_0$, f_n est bornée sur A et $||f_n||_\infty = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x)| \leqslant ||S_n - S||_\infty + ||S_{n-1} - S||_\infty$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} ||S_n - S||_\infty = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (||S_n - S||_\infty + ||S_{n-1} - S||_\infty) = 0$.
   Donc par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty = 0$ et ainsi (f_n) converge uniformément vers 0 sur A.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Soit $x \in [0; +\infty[$.
   Si $x = 0$:
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$:
   $\lim\limits_{x\to+\infty} n^2 f_n(x) = 0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de domination, $\sum f_n(x)$ converge absolument.

   On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc f_n est bornée sur $[0; +\infty[$.
   Comme f_0 est bornée ($f_0 = 0$), on en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur $[0, +\infty[$.

   De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :
   $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 0$.
   En effet :
   Soit $x \in [0, +\infty[$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ par croissances comparées.

De plus, f_n est bornée sur $[0, +\infty[$ donc $f_n - f = f_n$ est bornée sur $[0, +\infty[$.
Par ailleurs, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{e}^{-1}$.
Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)| = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sup\limits_{t \in [0;+\infty[} |f_n(t) - f(t)|$; donc $\sup\limits_{t \in [0;+\infty[} |f_n(t) - f(t)| \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
Ainsi, $\sup\limits_{t \in [0;+\infty[} |f_n(t) - f(t)| \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$.
On en déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0; +\infty[$.
Donc, d'après 1., $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE 18 analyse

Énoncé exercice 18

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
   (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

Corrigé exercice 18 :

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
   En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.
   En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
   On a donc $D = \left]-1, 1\right]$.
2. (a) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $\left]-1,1\right[$. (*)

   Pour $x = 1$, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.
   Donc d'après le théorème d'Abel radial, comme la série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$ a pour rayon 1 et que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$ converge pour $x = 1$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.
   C'est-à-dire $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n = S(1)$.
   Donc S est continue en 1. (**)
   Donc, d'après (*) et (**), S est continue sur D.

   (b) $\forall\, x \in D$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
   $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in]-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.
   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$ ne converge pas normalement sur D.

   $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, ce qui est absurde.

   (c) On étudie la convergence uniforme sur $[0,1]$.
   $\forall\, x \in [0,1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées.
   On en déduit que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et qu'on peut majorer son reste R_n.
   On a :
   $\forall\, x \in [0,1]$, $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)
   Donc $||R_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Donc, $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Bilan final :
En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1, 1[$ et converge uniformément sur tout segment de $]-1, 1]$.

EXERCICE 19 analyse

Énoncé exercice 19

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation d'une série de fonctions, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle :
$x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe :
$z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$.
   (b) Rappeler les résultats sur le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe :
$z \longmapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

Corrigé exercice 19

1. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon R.
On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$.
On pose : $\forall x \in \left]-R, R\right[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
i- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $\left]-R, R\right[$.
ii- $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]-R, R\right[$.
iii- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left]-R, R\right[$, $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$.
Or, $\sum n a_n x^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum n a_n x^n$.
Donc, d'après la remarque, $\sum n a_n x^{n-1}$ admet R comme rayon de convergence.
Donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-r, r]$ inclus dans $\left]-R, R\right[$.
On en déduit, d'après le théorème de dérivation terme à terme, que S est C^1 sur $\left]-R, R\right[$.
De plus, $\forall x \in \left]-R, R\right[$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
   (b) La série entière $\sum x^n$ a pour rayon 1.
On pose $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
D'une part, d'après 1.(*a*), S et dérivable sur $\left]-1, 1\right[$ et $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) x^n$.
D'autre part, $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $\sum x^n$ est une série géométrique de raison x avec $|x| < 1$.
Donc $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
Donc S est dérivable sur $\left]-1, 1\right[\, et \; \forall x \in \left]-1, 1\right[$, $S'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
On en déduit que $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est développable en série entière à l'origine et :
$\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$.

2. (a) On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$.

On a : $\forall z \in D$, $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

(b) Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de la variable complexe.

On note R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

On note R_b le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

On note R_c le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$.

Alors $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$.

De plus, $\forall z \in \mathbb{C}$, si $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.

(c) La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1.

Posons $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$.

Soit $z \in D$.

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Donc d'après le produit de Cauchy de deux séries entières :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1^k 1^{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1 \right) z^n.$$

C'est-à-dire, $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$.

Donc :

$\forall z \in D$, $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$.

EXERCICE 20 analyse

Énoncé exercice 20

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

   (c) $\sum \cos n z^n$.

Corrigé exercice 20

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

   Définition :
   Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :
   $R = \sup \{r \geqslant 0 \,/ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

   Corollaire :

   $\exists\,!\, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
   i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
   ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
   R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

2. (a) Notons R le rayon de convergence de $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ et posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $u_n(z) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   Pour $z = 0$, $\sum u_n(0)$ converge.
   Pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{n+1}{4n+2}|z|^2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{|z|^2}{4}$.
   D'après la règle de d'Alembert,
   Pour $|z| < 2$, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.
   Pour $|z| > 2$, la série numérique diverge grossièrement.
   On en déduit que R=2.

   (b) Notons R le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^{(-1)^n}$.

   On a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum n z^n$ vaut 1.
   Donc $R \geqslant 1$. (*)

   De même, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|\dfrac{1}{n}| \leqslant |a_n|$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n} z^n$ vaut 1.

   Donc $R \leqslant 1$. (**)

   D'après (*) et (**), $R = 1$.

   (c) Notons R le rayon de convergence de $\sum \cos n z^n$et posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \cos n$.

   On a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |1|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum 1.z^n$ vaut 1.
   Donc $R \geqslant 1$. (*)
   Pour $z = 1$, la série $\sum \cos n z^n = \sum \cos n$ diverge grossièrement car $\cos n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
   Donc $R \leqslant 1$. (**)

   D'après (*) et (**), $R = 1$.

EXERCICE 21 analyse

Énoncé exercice 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Corrigé exercice 21

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

   Définition :
   Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :
   $R = \sup \{r \geqslant 0 \,/ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

   Corollaire :

   $\exists\,!\, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
   i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
   ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
   R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

2. La série numérique $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = 1$.
   Donc $R \leqslant 1$. (*)

   De plus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, la suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   Donc $1 \in \{r \geqslant 0 \,/ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
   Donc $R \geqslant 1$. (**)

   D'après (*) et (**), $R = 1$.

3. Notons R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

   On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = b_n$.
   Or $b_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ diverge.

   Donc, par critère de minoration pour les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ diverge . (***)

   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = a_n \leqslant \sqrt{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 1$ car $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. (****)

   D'après (***) et (****), on peut appliquer 2. et on en déduit que $R = 1$.

EXERCICE 22 analyse

Énoncé exercice 22

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

Corrigé exercice 22

1. On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
   On note R le rayon de convergence de la série entière somme de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, c'est-à-dire le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

   On a toujours $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
   De plus, si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.

   Preuve :
   On suppose par exemple que $R_a \leqslant R_b$.

   Premier cas : $R_a = 0$.
   $R \geqslant 0 = \min(R_a; R_b)$.

   Deuxième cas : $R_a > 0$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b) = R_a$.
   Comme $|z| < R_a$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
   De même, comme $|z| < R_b$, alors $\sum b_n z^n$ converge absolument.
   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|(a_n + b_n) z^n| \leqslant |a_n z^n| + [b_n z^n|$. (*)
   Or $\sum (|a_n z^n| + [b_n z_n|)$ converge car somme de deux séries convergentes.
   Donc, par critère de majoration pour les séries à termes positifs et en utilisant (*), on en déduit que $\sum |(a_n + b_n) z^n|$ converge, c'est-à-dire $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge absolument.
   Donc $|z| \leqslant R$.
   On a donc prouvé que $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| < R_a \Rightarrow |z| \leqslant R$.
   Donc $R \geqslant \sup([0, R_a[)$, c'est-à-dire $R \geqslant R_a = \min(R_a, R_b)$. (**)

   On suppose maintenant que $R_a \neq R_b$, c'est-à-dire $R_a < R_b$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$.
   $|z| < R_b$, donc $\sum b_n z^n$ converge.
   $|z| > R_a$, donc $\sum a_n z^n$ diverge.
   Donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge (somme d'une série convergente et d'une série divergente).
   On en déduit que $|z| \geqslant R$.
   On a donc prouvé que $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $R_a < |z| < R_b \Rightarrow |z| \geqslant R$.
   Donc $R \leqslant \inf(]R_a, R_b[)$, c'est-à-dire $R \leqslant R_a = \min(R_a, R_b)$. (***)

   Donc, d'après (**) et (***), $R = \min(R_a, R_b)$.

2. **Pour** $|x| < 1$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

   Pour $|x| < \dfrac{1}{2}$, $\ln(1-2x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.

D'après 1., le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ vaut $\dfrac{1}{2}$.

Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de f contient $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et est contenu dans $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

Et, pour $|x|<\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$.

Pour $x=\dfrac{1}{4}$:

la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge en $\dfrac{1}{4}$.

De plus, la somme d'une série entière de la variable réelle est continue sur son intervalle ouvert de convergence.

Donc, comme $\left|\dfrac{1}{4}\right|<\dfrac{1}{2}$, alors $x\longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ est continue en $\dfrac{1}{4}$.

Pour $x=\dfrac{1}{2}$:

la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ diverge car elle est la somme d'une série convergente ($\dfrac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$) et d'une série divergente (série harmonique).

Pour $x=-\dfrac{1}{2}$:

la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge en $-\dfrac{1}{2}$ comme somme de deux séries convergentes.

En effet :

D'une part, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\dfrac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

D'autre part,

$\sum\limits_{n\geqslant 1} -\dfrac{2^n}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = -\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées (la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien positive, décroissante et de limite nulle).

La continuité de la somme de la série entière en ce point est alors assurée par le théorème d'Abel radial.

Remarque :

Soit $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon $R>0$.

On note f la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

La version du théorème d'Abel radial au programme assure que :

si $\sum a_n R^n$ converge alors $\lim\limits_{x\to R^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

En considérant la fonction la fonction $x\longmapsto f(-x)$ qui est la somme de la série entière $\sum(-1)^n a_n x^n$ (de rayon R), on a immédiatement l'extension suivante :

si $\sum a_n(-R)^n$ converge alors $\lim\limits_{x\to -R^+} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$.

EXERCICE 23 analyse

Énoncé exercice 23

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

Corrigé exercice 23

1. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (n+1)a_{n+1}$.
   Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
   Notons R' le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$.
   Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$.
   Donc $R = \dfrac{1}{l}$ (*)
   avec $R = +\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R = 0$ dans le cas $\ell = +\infty$.
   De plus, $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \dfrac{n+2}{n+1} \times \dfrac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|}$.
   Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = l$.
   Donc $R' = \dfrac{1}{l}$ (**).
   D'après (*) et (**), $R' = R$.
2. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
   On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in]-R, R[$, $f_n(x) = a_n x^n$.
   Soit $r \in [0, R[$. On pose $D_r = [-r, r]$.
   i) $\sum f_n$ converge simplement sur D_r.
   ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_r .
   iii) $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence R.
   En effet :
   $\sum f_n' = \sum n a_n x^{n-1} = \sum (n+1)a_{n+1}x^n$ et donc, d'après 1., $\sum f_n'$ a pour rayon de convergence R.

   Donc, d'après le cours, $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans $]-R, R[$, donc converge uniformément sur D_r.

   On en déduit que $\forall\, r \in [0, R[$, $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_r.
   Donc, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.

EXERCICE 24 analyse

Énoncé exercice 24

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 24

1. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$

   On en déduit que la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $R = +\infty$.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

3. (a) Pour $x \geqslant 0$, on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}\sqrt{x}$.

   Pour $x < 0$, on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t) = \cos\sqrt{-x}$.

   (b) D'après la question précédente, la fonction f n'est autre que la fonction S.
   S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cela prouve que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 25 analyse

Énoncé exercice 25

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Corrigé exercice 25

1. $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n \mathrm{e}^{-t}}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $\forall\, t \in [0,+\infty[$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.
   Or $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Donc, par critère de majoration pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Or f_n est continue sur $[0,1]$ donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. i) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par :
   $$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0,1[\\ \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{cases}$$
   ii) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   iii) $\forall t \in [0,+\infty[\,, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Alors, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 26 analyse

Énoncé exercice 26

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Corrigé exercice 26

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $|f_n(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$.
   Or $n \geqslant 1$, alors $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Donc, par règle d'équivalence, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Or f_n est continue sur$[0,1]$, donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. (a) $\forall\, t \in [0,+\infty[$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ car $1+t^2 \geqslant 1$.
   En intégrant, on obtient : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leqslant I_n$.
   Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) Remarque : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et clairement positive ce qui nous assure la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Déterminons la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   ii) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
   De plus, f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   iii) $\forall t \in [0,+\infty[\,, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

   En effet φ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. Comme $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Comme φ est continue sur $[0,1]$, donc φ est intégrable sur $[0,1]$ donc sur $[0,+\infty[$.

   Par le théorème de convergence dominée on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0.
3. D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et converge vers 0.
   Donc, par application du théorème spécial des séries alternées, on peut affirmer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$.

EXERCICE 27 analyse

Énoncé exercice 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Corrigé exercice 27

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $f_n(0) = 1$.
   Si $x \in]0,1]$, pour n au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\dfrac{1}{n^2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

   On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :
   $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. Soit $a \in]0;1[$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [a,1]$, $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$ (majoration indépendante de x).
   Donc $f_n - f$ est bornée sur $[a,1]$ et en posant $||f_n - f]]_{\infty,[a,1]} = \sup\limits_{t\in[a,1]} |f_n(t) - f(t)|$ on a :
   $||f_n - f]]_{\infty,[a,1]} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2} = 0,$.
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,[a,1]} = 0$
   On en déduit que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,1]$.
3. Les fonctions f_n étant continues sur $[0,1]$ et la limite simple f ne l'étant pas, on peut assurer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$.
4. i) Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $[0,1]$.
   ii) (f_n) converge simplement vers f sur $[0,1]$, continue par morceaux sur $[0,1]$.
   iii) De plus, $\forall x \in [0,1], |f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 = \varphi(x)$ avec $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

   D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc affirmer que :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

EXERCICE 28 analyse

Énoncé exercice 28

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Corrigé exercice 28

1. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$.
   f est continue sur $]2,+\infty[$.
   $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{2}{\sim} \dfrac{e^{-2}}{2} \times \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}$.
   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]2,3]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]2,3]$ car $\dfrac{1}{2} < 1$).
   Donc, par règle d'équivalence, f est intégrable sur $]2,3]$. (*)

   $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = g(x)$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 g(x) = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $g(x) = o(\dfrac{1}{x^2})$.
   Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[3,+\infty[$, on en déduit que g est intégrable sur $[3,+\infty[$.
   Donc, par règle d'équivalence, f est intégrable sur $[3,+\infty[$. (**)

   D'après (*) et (**), f est intégrable sur $]2,+\infty[$.
2. Soit a un réel strictement positif.
   On pose $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$.
   f est continue sur $]0,+\infty[$.
   $|f(x)| \underset{0}{\sim} |\ln x| = g(x)$.
   Or $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} g(x) = 0$ donc, au voisinage de 0, $g(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$.
   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]0,1]$ car $\dfrac{1}{2} < 1$).
   Donc g est intégrable sur $]0,1]$.
   Donc, par règle d'équivalence, $|f|$ est intégrable sur $]0,1]$.
   Donc, f est intégrable sur $]0,1]$ (*)

   $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^a} = h(x)$.
   Premier cas : si $a > 1$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1+a}{2}} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1-a}{2}} \ln x = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $h(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1+a}{2}}}\right)$.
   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\frac{1+a}{2}}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\dfrac{1+a}{2} > 1$).
   Donc, h est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Donc, par règle d'équivalence, f est intégrable sur $[1,+\infty[$. (**).

   D'après (*) et (**), f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Deuxième cas : si $a \leqslant 1$
   $\forall\, x \in [\mathrm{e},+\infty[$, $h(x) \geqslant \dfrac{1}{x^a}$.

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^a}$ non intégrable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.(fonction de Riemann avec $a \leqslant 1$)
Donc, par règle de minoration pour les fonctions positives, h non intégrable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$
Donc, par règle d'équivalence, f non intégrable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

Donc, f non intégrable sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 29 analyse

Énoncé exercice 29

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma\,'(x)$ sous forme d'intégrale.

Corrigé exercice 29

1. Soit $x \in]0,+\infty[$.
   La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est définie, positive et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

   $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \longmapsto t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de Riemann avec $1-x<1$).
   Donc, par critère d'équivalence, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$. (*)

   De plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(x,t) = 0$, donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $f(x,t) = o(\dfrac{1}{t^2})$.
   Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).
   Donc $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. (**)

   Donc, d'après (*) et (**), $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. Par intégration par parties, justifiée ci-après $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}t^{x}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   Le terme de variation possède des limites finies à ses bornes par croissances comparées, et est de valeur nulle, ce qui valide ce calcul et donne
   $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. i) pour tout $x>0$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après la question 1.).
   ii) $\forall\, t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et $\forall\,(x,t) \in]0,+\infty[^2, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.
   iii) Pour tout $x>0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   iv) Pour tout $t>0$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   v) Pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et $\forall\,(t,x) \in]0,+\infty[\times [a,b]$:
   $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|\mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t \in]0,1[\\ |\ln t|\mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t \in [1,+\infty[\end{cases}$
   avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
   En effet :

   $\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln t|t^{a-1} = \varphi_1(t)$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_1(t) = \lim_{t\to 0} t^{\frac{a}{2}}|\ln t| = 0$.

   Donc, au voisinage de 0^+, $\varphi_1(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$.

   Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1[$(fonction de Riemann avec $1-\dfrac{a}{2}<1$).
   Donc, φ_1 est intégrable sur $]0,1[$.
   Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, φ est intégrable sur $]0,1[$. (*)

   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$.

   Donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$.

Or, $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).
Donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$. (**)

D'après (*) et (**), φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
De plus, $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 30 analyse

Énoncé exercice 30

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

Corrigé exercice 30

1. Soit $u : (x,t) \mapsto u(x,t)$ une fonction définie de $X \times I$ vers $\mathbb{C}$, avec X et I intervalles contenant au moins deux points de $\mathbb{R}$.
   On suppose que :
   i) $\forall\, x \in X,\ t \longmapsto u(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
   On pose alors $\forall\, x \in X,\ f(x) = \int_I u(x,t)\mathrm{d}t$.
   ii) u admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ sur $X \times I$ vérifiant :
   \- $\forall x \in X, t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
   \- $\forall t \in I, x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur X.
   iii) il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I vérifiant :
   $\forall (x,t) \in X \times I, \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

   Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et $\forall x \in X, f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

2. On pose $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[,\ u(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
   i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ t \longmapsto u(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |u(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.
   Or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Donc, $t \longmapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   ii) $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$.
   \- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. .
   \- $\forall t \in [0,+\infty],\ x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   -iii) $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$ avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$.
   En effet, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$.
   On en déduit que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et comme elle est continue sur $[0,1[$, alors φ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$

3. (a) On a, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.
   Procédons à une intégration par parties, justifiée par l'existence immédiate de limites finies aux bornes du terme de variation.

$$\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne $f'(x)+\dfrac{x}{2}f(x)=0$.
Donc f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\dfrac{x}{2}y=0$.

(b) Les solutions de (E) sont les fonctions y définies par $y(x)=A\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $A\in\mathbb{R}$.

EXERCICE 31 analyse

Énoncé exercice 31

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Corrigé exercice 31

1. En linéarisant $\cos^4 x$, on obtient $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$.
   Donc, $x \longmapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ est une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Notons (E) l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.
   C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions y définies par : $y(x) = \lambda\cos x + \mu \sin x$.

   Par la méthode de variation des constantes,
   on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$ avec λ, μ fonctions dérivables vérifiant : $\begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \cos^3 x \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \lambda'(x) = -\sin x\cos^3 x \\ \mu'(x) = \cos^4 x \end{cases}$.

   $\lambda(x) = \dfrac{1}{4}\cos^4 x$ convient.
   D'après la question 1., $\mu(x) = \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ convient.
   On en déduit que la fonction y_p définie par $y_p(x) = \dfrac{1}{4}\cos^5 x + \left(\dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x\right)\sin x$ est une solution particulière de (E).

   Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies par :
   $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + y_p(x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 32 analyse

Énoncé exercice 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Corrigé exercice 32

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme S.
   Pour tout $x\in\,]-R,R[$,
   $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ et $S''(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}$.
   Supposons que S soit solution de l'équation différentielle proposée sur $]-R,R[$.
   On a donc que $\forall x\in\,]-R,R[$:
   $$x(x-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}\right)x^n.$$
   Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on a donc que :
   $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $(n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}=0$.
   C'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$, $na_{n+1}=(n+1)a_n$.
   Ce qui revient à : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=na_1$.
   De plus, le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ étant égal à 1.
   Ainsi, $\forall x\in\,]-1,1[$, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_1nx^n=a_1x\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}=a_1x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{a_1x}{(1-x)^2}$.
   Réciproquement,
   Soit $a_1\in\mathbb{R}$.
   On vérifie que $x\mapsto\dfrac{a_1x}{(1-x)^2}$ est solution de l'équation différentielle proposée sur $]-1,1[$.
2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
   Prouvons que les solutions de (E) sur $]0;1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine.
   Raisonnons par l'absurde.
   Si toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall\, x\in\,]0;1[$, $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.
   Or, d'après le cours, comme les fonctions $x\longmapsto x(x-1)$, $x\longmapsto 3x$ et $x\longmapsto 1$ sont continues sur $]0;1[$ et que la fonction $x\longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0;1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ est un plan vectoriel.
   D'où l'absurdité.

EXERCICE 33 analyse

Énoncé exercice 33

On pose : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f\,(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0)=0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Corrigé exercice 33

1. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ ||(x,y)||_2=\sqrt{x^2+y^2}$.
   On a $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|\leqslant||(x,y)||_2$ et $|y|\leqslant||(x,y)||_2$.
   On en déduit que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,
   $|f(x,y)-f(0,0)|=\dfrac{|x||y|}{||(x,y)||_2}\leqslant\dfrac{(||(x,y)||_2)^2}{||(x,y)||_2}=||(x,y)||_2\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0.$
   On en déduit que f est continue en $(0,0)$.

   Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles, f admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   En $(0,0)$:
   $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right)=0$, donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa première variable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
   De même, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\left(f(0,t)-f(0,0)\right)=0$. Donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa seconde variable et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
3. D'après le cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

   Or, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
   On remarque que $\forall\,x>0,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   Donc, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\neq\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

   Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 34 analyse

Énoncé exercice 34

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soient B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

Corrigé exercice 34

On note $|| \; ||$ la norme sur E.

1. Soit A une partie non vide de E.
   $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a.
   $\forall\, r > 0$, $B_0(a, r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r.

   Soit $a \in E$.
   $a \in \bar{A} \iff \forall\, V \in \mathcal{V}(a),\ V \cap A \neq \emptyset$.
   Ou encore :
   $a \in \bar{A} \iff \forall\, r > 0,\ B_0(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

2. Soit $x \in \overline{A}$.
   Prouvons que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   Par hypothèse, $\forall\, r > 0,\ B_0(a, r) \cap A \neq \emptyset$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_0(x, \dfrac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.
   C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, x_n \in B_0(x, \dfrac{1}{n}) \cap A$.
   On fixe alors, pour tout entier naturel n non nul, un tel x_n.
   Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans A et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||x_n - x|| < \dfrac{1}{n}$.
   C'est-à-dire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.

   Soit $x \in E$. On suppose que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   Prouvons que $x \in \bar{A}$.
   Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $B_0(x, \varepsilon) \subset V$.
   On fixe un tel ε strictement positif.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ donc $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow ||x_n - x|| < \varepsilon$.
   On fixe un tel entier N.
   Donc, comme (x_n) est à valeurs dans A, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in B_0(x, \varepsilon) \cap A$.
   Or $B_0(x, \varepsilon) \subset V$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in V \cap A$, c'est-à-dire $V \cap A \neq \emptyset$.
   On peut en conclure que $x \in \bar{A}$.

3. $\bar{A} \subset E$ et $0_E \in \bar{A}$ car $0_E \in A$ et $A \subset \bar{A}$.
   Soit $(x, y) \in \left(\bar{A}\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   D'après 1., Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A convergeant respectivement vers x et y.
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + \lambda y_n) = x + \lambda y$.
   Or A est un sous-espace vectoriel de E et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in A^2$, donc $x_n + \lambda y_n \in A$.
   On en déduit que la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans A et converge vers $x + \lambda y$.
   On a bien $x + \lambda y \in \bar{A}$.

4. On a les équivalences suivantes, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \overline{A \times B} &\iff \exists ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in (A \times B)^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (x, y)\\
&\iff \exists ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in A^{\mathbb{N}} \times B^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = x \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} y_n = y\\
&\iff \left(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = x\right) \text{ et } \left(\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} y_n = x\right)\\
&\iff x \in \bar{A} \ \text{ et } \ y \in \bar{B}\\
&\iff (x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité d'ensembles $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

EXERCICE 35 analyse

Énoncé exercice 35

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $|| \, ||_E$ (respectivement $|| \, ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.

   P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Corrigé exercice 35

1. Prouvons que $P1. \Longrightarrow P2.$.
   Supposons f continue en a.
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers a. Prouvons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Par continuité de f en a, $\exists\, \alpha > 0 \,/\, \forall x \in E, \|x-a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$. (*)
   On fixe un tel α strictement positif.
   Par convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a, $\exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - a\|_E \leqslant \alpha$.
   On fixe un N convenable.
   Alors, d'après (*), $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|f(x_n) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$.
   On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouvons que $P2. \Longrightarrow P1.$
   Supposons $P2.$ vraie.
   Raisonnons par l'absurde en supposant que f non continue en a.
   C'est-à-dire $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \forall\, \alpha > 0, \exists\, x \in E$ tel que $||x-a||_E \leqslant \alpha$ et $||f(x) - f(a)||_F > \varepsilon$.
   On fixe un tel ε strictement positif.
   Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\alpha = \dfrac{1}{n}$, il existe $x_n \in E$ tel que $||x_n - a||_E \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $||f(x_n) - f(a)||_F > \varepsilon$. (*)
   Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $||x_n - a||_E \leqslant \dfrac{1}{n}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite converge vers a.
   Donc, d'après l'hypothèse, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(a)$.
   Donc $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow ||f(x_n) - f(a||_F \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Ainsi, on obtient une contradiction avec (*).
2. Soit $x \in E$.
   Puisque la partie A est dense dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = g(x_n)$.
   Et en passant à la limite, sachant que f et g sont continues sur E, on obtient $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 36 analyse

Énoncé exercice 36

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $|| \, ||_E$ (respectivement $|| \, ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.
   P2. f est continue en 0_E.
   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

Corrigé exercice 36

1. P1 $\Rightarrow$ P2 de manière évidente.

   Prouvons que P2 $\Rightarrow$ P3.
   Supposons f continue en 0_E.
   Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x - 0_E\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(0_E)\|_F \leqslant 1$.
   Soit $x \in E$
   Si $x \neq 0_E$, posons $y = \dfrac{\alpha}{\|x\|_E}x$. Puisque $\|y\|_E = \alpha$, on a $\|f(y)\|_F \leqslant 1$.
   Donc, par linéarité de f on obtient $\|f(x)\|_F \leqslant \dfrac{1}{\alpha} \|x\|_E$.
   Si $x = 0_E$ l'inégalité précédente est encore vérifiée.
   En prenant alors $k = \dfrac{1}{\alpha}$, on obtient le résultat voulu.
   Prouvons que P3 $\Rightarrow$ P1.
   Supposons que $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.
   Comme f est linéaire, $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(y) - f(x)\|_F = \|f(y - x)\|_F \leqslant k \|y - x\|_E$.
   La fonction f est alors lipschitzienne, donc continue sur E.
   En effet :
   Soit $a \in E$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   On a : $\forall x \in E$, $\|f(x) - f(a)\|_F \leqslant k \|x - a\|_E$.
   On pose $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$.
   Alors : $\forall x \in E$, $\|x - a\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$.
   Donc f est continue en a.

2. L'application φ est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale.
   De plus, $\forall$ $f \in E$, $|\varphi(f)| = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}t = \|f\|_\infty$.
   Donc φ vérifie la propriété P3.
   Donc d'après 1., φ est continue sur E.

EXERCICE 37 analyse

Énoncé exercice 37

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Corrigé exercice 37

1. (a) Prouvons que N_∞ est une norme sur E.
   $\forall\, f \in E$, $|f|$ est positive et continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée et donc $N_\infty(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_\infty(f) = 0$.
   Alors, $\forall\, t \in [0,1]$, $|f(t)| = 0$, donc $f = 0$.

   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$. Comme $|\lambda| \geq 0$, on a par positive homogénéité de la borne supérieure
   $N_\infty(\lambda f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |\lambda f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda| \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)| = |\lambda| N_\infty(f)$.
   iii) Soit $(f,g) \in E^2$.
   $\forall\, t \in [0,1]$,$|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
   Donc $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

   On en déduit que N_∞ est une norme.

   Prouvons que N_1 est une norme sur E.
   $\forall\, f \in E$, $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc $N_1(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$.
   Or $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc $|f|$ est nulle.
   C'est-à-dire $f = 0$.
   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.
   $N_1(\lambda f) = \displaystyle\int_0^1 |\lambda f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| N_1(f)$.
   iii) Soit $(f,g) \in E^2$.
   $\forall\, t \in [0,1]$, $|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$. Donc, par linéarité de l'intégrale, $N_1(f+g) \leqslant N_1(f) + N_1(g)$.

   On en déduit que N_1 est une norme sur E.

   (b) $k = 1$ convient car, $\forall\, f \in E$, $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 N_\infty(f)\mathrm{d}t = N_\infty(f)$.

   (c) L'application identité de E, muni de la norme N_∞, vers E, muni de la norme N_1, est continue car linéaire et vérifiant $\forall\, f \in E$, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit que :
   un ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
   On peut aussi raisonner de façon plus élémentaire par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

2. Pour $f_n(t) = t^n$, on a $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = +\infty$.
   Donc ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

EXERCICE 38 analyse

Énoncé exercice 38

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $|| \ ||_1$ définie par : $\forall\, f \in E$, $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que u est un endomorphisme de E.
   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $|| \ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

   Calculer $|||u|||$.

3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

Corrigé exercice 38

1. Soit $f \in E$. On pose $g = u(f)$.
   On a $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   Donc $||g||_1 = \displaystyle\int_0^1 |g(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx$.
   Or, $\forall x \in [0,1]$, $\left|\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\,dt$.
   De plus, $|f|$ est positive donc $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x |f(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt = ||f||_1$.
   Donc $||g||_1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 ||f||_1 dt = ||f||_1$.
   Donc $\forall f \in E$, $||u(f)||_1 \leqslant ||f||_1$.
   Donc u est continue sur E et $|||u||| = \sup\limits_{f \in E\setminus\{0\}} \frac{||u(f)||_1}{||f||_1}$.
   Et on en déduit que $|||u||| \leqslant 1$ (*)
   On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.
   $||f_n||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \left[-\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-n}$.
   $||u(f_n)||_1 = \displaystyle\int_0^1 |u(f_n)(x)|dx$.
   Or, $u(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^x n\mathrm{e}^{-nt}dt = 1 - \mathrm{e}^{-nx}$.
   De plus, $\forall x \in [0,1]$, $1 - \mathrm{e}^{-nx} \geqslant 0$.
   Donc $||u(f_n)||_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - \mathrm{e}^{-nx}\right) dx = \left[x + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \frac{1}{n}$.
   On en déduit que $\dfrac{||u(f_n)||_1}{||f_n||_1} = \dfrac{1 + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \frac{1}{n}}{1 - \mathrm{e}^{-n}}$.

Puis, comme $|||u||| = \sup\limits_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{||u(f)||_1}{||f||}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|||u||| \geqslant \dfrac{||u(f_n)||_1}{||f_n||_1}$.
C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|||u||| \geqslant \dfrac{1 + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \frac{1}{n}}{1 - \mathrm{e}^{-n}}$.
Et donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $|||u||| \geqslant 1$ (**)

Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que $|||u||| = 1$.

2. (a) u est clairement linéaire et $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie donc, d'après le cours, u est continue sur $\mathbb{R}^n$ et ce, quelque soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$, puisqu'elles sont toutes équivalentes.
   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $|| \; ||_2$, qui est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, noté $(\; | \;)$.
   $|||u||| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|u(x)|}{||x||_2}$.
   Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   On pose $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. On a $|u(x)| = |(x|a)|$.
   Donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|u(x)| \leqslant ||a||_2 ||x||_2$.
   Donc $|||u||| \leqslant ||a||_2$ (*)

   On pose $x = a$.
   $a \neq 0$ donc $\dfrac{|u(x)|}{||x||_2} = \dfrac{||a||_2^2}{||a||_2}$.
   Donc $|||u||| \geqslant ||a||_2$ (**).

   Donc, d'après (*) et (**), $|||u||| = ||a||_2$.
3. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$.
   Pour tout polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ de E, on pose $||P|| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant p} |a_k|$.
   On considère alors l'endomorphisme u de E défini par :$\forall P \in E$, $u(P) = P'$.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{||u(P_n)||}{||P_n||} = n$ et donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{||u(P_n)||}{||P_n||} = +\infty$.

   Donc $\nexists k \in \mathbb{R}^+ / \; \forall P \in E, ||u(P)|| \leqslant k||P||$.
   Donc u n'est pas continue sur E muni de la norme $|| \; ||$.

EXERCICE 39 analyse

Énoncé exercice 39

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans l^2.
   On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^{\perp}$ (au sens de $(\ |\ )$).
   Comparer F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Corrigé exercice 39

1. (a) Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

   (b) La suite nulle appartient à l^2.

   Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.
   On a $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$. (1)
   Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.
   Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.
   Donc $z \in l^2$.

   On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   Ainsi, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
   Donc φ est linéaire sur l^2. (*)

   $\forall\, x = (x_n) \in l^2$, $|x_p|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$, donc $|x_p| \leqslant ||x||$.
   Donc $\forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, $|\varphi(x)| = |x_p| \leqslant ||x||$ (**)

   D'après (*) et (**), φ est continue sur l^2.

3. On remarque déjà que $F \subset l^2$.
   Analyse :
   Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\perp}$.
   Alors $\forall\, y \in F$, $(x|y) = 0$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$.

On considère la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie par :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.
On en déduit que, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $x_p = 0$.
C'est-à-dire $x = 0$.

Synthèse :
la suite nulle appartient bien à $F^{\perp}$.

Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

Ainsi, $(F^{\perp})^{\perp} = l^2$.
On constate alors que $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.

EXERCICE 40 analyse

Énoncé exercice 40

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $||\ ||$.
On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

Corrigé exercice 40

1. (a) Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
   D'après les hypothèses, on a $||u^2|| \leqslant ||u||^2$.
   On en déduit, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u^n\| \leqslant \|u\|^n$.
   Puisque $\|u\| < 1$, la série numérique $\sum \|u\|^n$ est convergente et, par comparaison des séries à termes positifs, on peut affirmer que la série vectorielle $\sum u^n$ est absolument convergente.
   Puisque l'algèbre A est de dimension finie, la série $\sum u^n$ converge.

   (b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $(e-u)\sum_{n=0}^{N} u^n = e - u^{N+1}$. (1)

   L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & (e-u)x \end{array}$ est linéaire.
   Et, comme A est de dimension finie, on en déduit que φ est continue sur A.

   Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u^n$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

   $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = S$ (d'après 1.a) et φ est continue sur A donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim\limits_{N\to+\infty} \varphi(S_N) = \varphi(S)$.

   C'est-à-dire $\lim\limits_{N\to+\infty} (e-u)\sum_{n=0}^{N} u^n = (e-u)\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$. (2)

   De plus, $\left\|u^{N+1}\right\| \leqslant \|u\|^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(e - u^{N+1}\right) = e$. (3)

   Ainsi, d'après (1), (2) et (3), on en déduit que : $(e-u)\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = e$.

   On prouve, de même, que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right)(e-u) = e$.

   Et donc, $e-u$ est inversible avec $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. On a $\left\|\dfrac{u^n}{n!}\right\| \leqslant \dfrac{\|u\|^n}{n!}$. De plus, la série exponentielle $\sum \dfrac{||u||^n}{n!}$ converge.

   Donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série vectorielle $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ est absolument convergente et donc convergente, car A est de dimension finie.

EXERCICE 41 analyse

Énoncé exercice 41

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
   (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
   $(S)\ :\ \begin{cases} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{cases}$
   (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
   En déduire les valeurs possibles de λ.
3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

Corrigé exercice 41

1. C est la sphère de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{13}$ pour la norme $\|.\|_2$ usuelle.
   C est donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.
   Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, C est un compact de $\mathbb{R}^2$.
   On a aussi $C \neq \emptyset$.
   f est une application polynomiale donc f est continue sur le compact C.
   Donc f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. (a) Soit $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 13$.
   g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale, tout comme f.
   De plus, le gradient de g est $\nabla g : (x, y) \mapsto (2x, 2y)$
   de sorte que $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$.
   On en déduit que ∇g ne s'annule pas sur C.
   Il découle alors, du théorème d'optimisation sous une contrainte, qu'il existe un scalaire λ (multiplicateur de Lagrange) tel que $\nabla f(u, v) = \lambda \nabla g(u, v)$.
   Et on a :$\nabla f(u, v) = \lambda \nabla g(u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{cases}$
   (b) (S) est équivalent à $\begin{cases} (4 - \lambda)u & +6v & = 0 \\ 6u & -(1 + \lambda)v & = 0 \end{cases}$
   que l'on peut voir comme un système linéaire en (u, v) avec un paramètre λ.
   Comme $(0, 0) \notin C$ et que f possède effectivement des extremums sur C, ce système linéaire a nécessairement au moins une solution non nulle.
   Ce qui implique que ce système n'est pas de Cramer.
   Son déterminant $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36$ est donc nul.
   En développant, il vient $\lambda^2 - 3\lambda - 40 = 0$.
   Les solutions de cette équation sont 8 et -5, qui sont donc les deux seules valeurs possibles de λ.
3. • Si $\lambda = 8$
   on obtient, d'après (S), $v = \dfrac{2}{3}u$.
   Comme $(u, v) \in C$, il vient $u^2 + v^2 = u^2 + \dfrac{4}{9}u^2 = \dfrac{13}{9}u^2 = 13$.
   donc $u = \pm 3$
   donc $(u, v) \in \{(3, 2), (-3, -2)\}$.

   • Si $\lambda = -5$
   on obtient, d'après (S), $v = -\dfrac{3}{2}u$
   Comme $(u, v) \in C$, il vient $\dfrac{13}{4}u^2 = 13$.
   donc $u = \pm 2$

donc $(u, v) \in \{(2, -3), (-2, 3)\}$.
Or, $f(3, 2) = f(-3, -2) = 36 + 72 - 4 = 104$ et $f(2, -3) = f(-2, 3) = 16 - 72 - 9 = -65$.
Comme f atteint effectivement un maximum et un minimum sur C et qu'elle ne peut les atteindre qu'en ces points, on a donc :
$\max\limits_{C} f = 104$ et $\min\limits_{C} f = -65$.

EXERCICE 42 analyse

Énoncé exercice 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Corrigé exercice 42

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$.
   En effet, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\ln x$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.
   On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$.
   Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. On suppose qu'il existe une solution f de (E) sur $[0, +\infty[$.
   Alors f est aussi solution de E sur $]0, +\infty[$.
   Donc, il existe une constante k telle que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
   De plus, comme f est solution de E sur $[0, +\infty[$ alors f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   Donc en particulier, f est continue en 0.
   Donc $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \left(kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right) = 0$.
   f doit également être dérivable en 0.
   Or, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
   Donc f n'est pas dérivable en 0.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.

EXERCICE 43 analyse

Enoncé exercice 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

Corrigé exercice 43

On pose $f(x) = \text{Arctan}\, x$.

1. (a) **Premier cas** : Si $u_1 < u_0$
   Puisque la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\, x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\text{Arctan}(u_1) < \text{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$.
   Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
   Deuxième cas : Si $u_1 > u_0$
   Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.
   Troisième cas : Si $u_1 = u_0$
   La suite (u_n) est constante.
   Pour connaître les variations de la suite (u_n), il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\text{Arctan}(u_0) - u_0$.
   On pose alors $g(x) = \text{Arctan}x - x$ et on étudie le signe de la fonction g.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-x^2}{1 + x^2}$ et donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) < 0$.
   Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ alors :
   $\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$, $g(x) > 0$.
   On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :
   - Si $x_0 > 0$, la suite(u_n) est strictement décroissante.
   - Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
   - Si $x_0 < 0$, la suite(u_n) est strictement croissante.

   (b) La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f.
   Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de f.
   Premier cas : Si $u_0 > 0$
   L'intervalle $]0, +\infty[$ étant stable par f, on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f.
   Deuxième cas : Si $u_0 < 0$
   Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.
   Troisième cas : Si $u_0 = 0$
   La suite (u_n) est constante.

   Conclusion : $\forall\, u_0 \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers 0.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.
   On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\text{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\text{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$.
   Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(u_n)$.
   De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h.
   On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.

Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.
Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

EXERCICE 44 analyse

Énoncé exercice 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Corrigé exercice 44

Soit E un espace vectoriel normé. On note A et B deux parties non vides de E.

1. (a) $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x.
   (b) On suppose $A \subset B$. Prouvons que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
   Or $A \subset B$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
   Donc $x \in \overline{B}$.
2. D'après la question précédente,
   $A \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.
   $B \subset A \cup B$, donc $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Prouvons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A \cup B}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
   On considère les ensembles $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in A\}$ et $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in B\}$.
   Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$, A_1 ou A_2 est de cardinal infini.
   On peut donc extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A ou une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
   Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Remarque :On peut aussi prouver que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ sans utiliser les suites :
   $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermés, donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$. Or $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) D'après la question 1. ,
   $A \cap B \subset A$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$.
   $A \cap B \subset B$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$.
   Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   Autre méthode :
   Comme $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ alors $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Comme $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$, alors par minimalité de $\overline{A \cap B}$, on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$.
   $\overline{A \cap B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

EXERCICE 45 analyse

Énoncé Exercice 45

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $|| \; ||$ la norme sur E.
Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

Corrigé Exercice 45

On note $|| \; ||$ la norme sur E.

1. (a) Soit A une partie d'un ensemble E.
   $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.
   (b) On suppose que A est une partie non vide et convexe de E. Prouvons que $\overline{A}$ est convexe.
   Soit $(x, y) \in \left(\overline{A}\right)^2$. Soit $t \in [0, 1]$.
   Prouvons que $z = tx + (1-t)y \in \overline{A}$.
   $x \in \overline{A}$ donc, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.
   $y \in \overline{A}$ donc, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = y$.
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = tx_n + (1-t)y_n$.
   $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$, $y_n \in A$ et A est convexe, donc $z_n \in A$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = z$.
   Donc z est limite d'une suite à valeurs dans A, c'est-à-dire $z \in \overline{A}$.
2. (a) Soit A une partie non vide de E. Soit $x \in E$ tel que $d_A(x) = 0$.
   Par définition de la borne inférieure, nous avons : $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, a \in A$ tel que $\|x - a\| < \epsilon$.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, il existe $a_n \in A$ tel que $\|x - a_n\| < \frac{1}{n}$.
   Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite est à valeurs dans A et converge vers x, donc $x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que, $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   Soit $(x, y) \in (A)^2$. Soit $t \in [0, 1]$.
   Prouvons que $z = tx + (1-t)y \in A$.
   Par hypothèse, on a $d_A(z) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$. (1)
   Or $x \in A$ et $y \in A$, donc $d_A(x) = d_A(y) = 0$ et donc, d'après (1), $d_A(z) = 0$.
   Alors, d'après 2.(a), $z \in \overline{A}$. Or A est fermée, donc $\overline{A} = A$ et donc $z \in A$.

EXERCICE 46 analyse

Énoncé exercice 46

On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Corrigé exercice 46

1. $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.

   Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}) - \dfrac{1}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3}) = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{3}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$.

   Donc, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

   D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right)$.

   Donc $v_n = \dfrac{3\pi}{8}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$ (*)

   $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées).

   De plus, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc par critère de domination, $\sum_{n\geqslant 1} O(\dfrac{1}{n^2})$ converge absolument donc converge.

   Donc d'après (*), $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

3. D'après le développement asymptotique du 2., on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi}{8n}$.

   Or $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum_{n\geqslant 1} |v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ ne converge pas absolument.

EXERCICE 47 analyse

Énoncé exercice 47

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\displaystyle\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n}=4^n \\ a_{2n+1}=5^{n+1}\end{cases}$

Corrigé exercice 47

1. On note R le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$ et pour tout réel x, on pose $u_n(x)=\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.

   Pour x non nul, $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\dfrac{3nx^2}{n+1}\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\left|3x^2\right|$.
   Donc, d'après la règle de d'Alembert :
   si $\left|3x^2\right|<1$ c'est-à-dire si $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument
   et si $\left|3x^2\right|>1$ c'est-à-dire si $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge.

   On en déduit que $R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   On pose : $\forall\,x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n x^{2n}}{n}$.
   On a : $\forall\,x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(3x^2)^n}{n}$.

   Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a : $\forall\,t\in\,]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}=-\ln(1-t)$.

   Ainsi : $\forall\,x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x)=-\ln(1-3x^2)$.

2. Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
   On considère les séries $\sum a_{2n}x^{2n}=\sum 4^n x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum 5^{n+1}x^{2n+1}$.
   Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum 4^n x^{2n}$ et R_2 le rayon de convergence de $\sum 5^{n+1}x^{2n+1}$.

   Le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1.
   Or, $\sum 4^n x^{2n}=\sum (4x^2)^n$.
   Donc pour $|4x^2|<1$ c'est-à-dire $|x|<\dfrac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ converge absolument
   et pour $|4x^2|>1$ c'est-à-dire $|x|>\dfrac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ diverge.
   On en déduit que $R_1=\dfrac{1}{2}$.
   Par un raisonnement similaire et comme $\sum 5^{n+1}x^{2n+1}=5x\sum (5x^2)^n$, on trouve $R_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

   $\sum a_n x^n$ étant la série somme des séries $\sum a_{2n}x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$, on en déduit, comme $R_1\neq R_2$, que $R=\min(R_1,R_2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

   D'après ce qui précéde, on en déduit également que :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x^2)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} (5x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}.$$

EXERCICE 48 analyse

Énoncé exercice 48

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

Corrigé exercice 48

1. Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
2. On pose : $\forall f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
   (a) f et P_n étant continues sur $[0,1]$,
   $\forall t \in [0,1]$, $|P_n(t)f(t) - f^2(t)| = |f(t)||P_n(t) - f(t)| \leqslant N_\infty(f)N_\infty(P_n - f)$.
   On en déduit que $N_\infty(P_n f - f^2) \leqslant N_\infty(f)N_\infty(P_n - f)$ (1)
   Or (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(P_n - f) = 0$.
   Donc, d'après (1), $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(P_n f - f^2) = 0$.
   Donc $(P_n f)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f^2.
   (b) D'après la question précédente, $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n f$ est continue sur $[0,1]$.
   Donc, d'après le théorème d'intégration d'une limite uniforme de fonctions continues,
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty}(P_n(t)f(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (c) Pour tout entier naturel n, $P_n \in \mathbb{R}[X]$ donc il existe un entier naturel d_n tel que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k}\,X^k$ où les $a_{n,k}$ sont des réels.
   Par linéarité de l'intégrale, on a :
   $$\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k}\,t^k\right) f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k}\,t^k\,f(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k}\int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t.$$
   Or, par hypothèse, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t = 0$.
3. D'après les questions 2.(b) et 2.(c), on a $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   Or f^2 est positive et continue sur $[0,1]$, donc f^2 est nulle sur $[0,1]$ et donc f est nulle sur $[0,1]$.

EXERCICE 49 analyse

Énoncé exercice 49

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t$.
   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Corrigé exercice 49

1. Rappelons que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge ($\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$).

   (a) $\sum a_n$ converge absolument, donc converge simplement ; donc la suite (a_n) converge vers 0 et donc elle est bornée.
   Autre méthode : On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leqslant M = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|$.

   (b) La suite (a_n) est bornée donc $\exists\, K \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant K$.
   Soit $t \in [0, +\infty[$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant K \dfrac{t^n}{n!}$. Or la série $\sum \dfrac{t^n}{n!}$ converge, donc $\sum f_n(t)$ converge absolument, donc converge.
   On a donc vérifié la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et positive, ce qui permet de calculer directement son intégrale.
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.
   En effectuant une intégration par parties, validée par les limites finies aux bornes du terme de variation par croissances comparées, on a
   $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \left[-t^n \mathrm{e}^{-t} \right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = n I_{n-1}$
   On en déduit par récurrence que $I_n = n! I_0 = n! < \infty$ et donc que g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   Alors $t \mapsto |f_n(t)|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|f_n(t)| = \dfrac{|a_n|}{n!} g_n(t)$.
   Et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{n!} n! = |a_n|$.

   (b) i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question 2.(a)
   ii) $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et a pour somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ d'après 1.(b).
   iii) f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$ d'après la question 1.(b) (admis)
   $|f_n|$ étant positive pour tout n, on a l'égalité suivante dans $[0, +\infty]$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|<\infty$ (car, par hypothèse, $\sum a_n$ converge absolument)
Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions, f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,t^n}{n!}\,e^{-t}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{a_n\,t^n}{n!}\,e^{-t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty}t^n\,e^{-t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}\,n!=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$

EXERCICE 50 analyse

Énoncé exercice 50

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Corrigé exercice 50

1. Notons $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times[0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-2\,t}}{x+t} \end{array} \right.$

   (a) $\forall x \in]0;+\infty[,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.

   (b) $\forall t \in [0;+\infty[,\ x \mapsto f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

   (c) Soit $[a,b]$ un segment de $]0;+\infty[$.
   $\forall x \in [a,b],\ \forall t \in [0;+\infty[,\ |f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-2\,t}$ et $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-2\,t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.
   En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$, donc $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0;+\infty[$.

   On en déduit que, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,
   $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$.

2. $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ xF(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t}\,\mathrm{e}^{-2\,t}\mathrm{d}t$.
   Posons $\forall\, x \in]0;+\infty[, \forall\, t \in [0;+\infty[,\ h_x(t) = \frac{x}{x+t}\,\mathrm{e}^{-2\,t}$.
   i) $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ t \longmapsto h_x(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   ii) $\forall t \in [0;+\infty[,\ \lim\limits_{x\to+\infty} h_x(t) = e^{-2\,t}$.
   La fonction $h : t \mapsto e^{-2\,t}$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
   iii) $\forall\, x \in]0;+\infty[, \forall t \in [0;+\infty[,\ |h_x(t)| \leqslant e^{-2\,t}$ et $t \mapsto e^{-2\,t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.
   Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à $(h_x)_{x\in]0;+\infty[}$,
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2\,t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = \frac{1}{2}$.

3. D'après 2., $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = \frac{1}{2}$, donc $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,x}$.

EXERCICE 51 analyse

Énoncé exercice 51

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Corrigé exercice 51

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4(2n+3)} = \dfrac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}$.
   Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4} < 1$.
   Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
2. D'après le cours, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$.
   De plus, $\forall\, u \in \left]-1,1\right[$, $(1+u)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} u^n$.
   En particulier, pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $u = -t$:
   $R = 1$ et $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots\big(-(2n-1)\big)}{2^n n!} (-t)^n$.
   En multipliant numérateur et dénominateur par $2.4.\ldots 2n = 2^n n!$, on obtient :
   $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\, t^n$
   Conclusion : $R = 1$ et $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\, t^n$.
3. D'après la question précédente, en remarquant que : $x \in]-1,1[\Leftrightarrow t = x^2 \in [0,1[$ et $[0,1[\subset]-1,1[$, il vient :
   $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\, x^{2n}$ avec un rayon de convergence $R = 1$.
   Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\operatorname{Arcsin}' : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé.
   De plus, on obtient :
   $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin} x = \underbrace{\operatorname{Arcsin} 0}_{=0} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}\, x^{2n+1}$ avec un rayon de convergence $R = 1$.
4. Prenons $x = \dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ dans le développement précédent.
   On en déduit que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\, \frac{1}{2^{2n+1}}$.

C'est-à-dire, en remarquant que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)} = \frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 52 analyse

Énoncé exercice 52

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Corrigé exercice 52

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $x^2+y^2-xy-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2-2xy) = \dfrac{1}{2}(x-y)^2 \geqslant 0$.
   Donc $x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   D'après 1., $x^2+y^2-xy = 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.
   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$.
   D'après **1.**, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \dfrac{2y^4}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$.
   Ainsi, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 2(x^2+y^2) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
   Or : f est continue en $(0,0) \Longleftrightarrow f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} f(0,0) = \alpha$.
   Donc : f est continue en $(0,0) \Longleftrightarrow \alpha = 0$.
   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \alpha = 0$.
3. (a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y^4(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$.
   (b) Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   Pour tout $y \neq 0$, $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = y \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   (c) Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en $(0,0)$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, on note $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On a alors $|x| \leqslant r$ et $|y| \leqslant r$.
   De plus, $(x,y) \to (0,0) \Longleftrightarrow r \to 0$.
   D'après **1.** et l'inégalité triangulaire,
   $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 4\,\dfrac{\left|y^4(2x-y)\right|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\,\dfrac{r^4(2r+r)}{r^4} = 12r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leqslant 4\,\dfrac{\left|2y^5-3xy^4+4x^2y^3\right|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\,\dfrac{2r^5+3r^5+4r^5}{r^4} = 36r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ et par suite sur $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 53 analyse

Énoncé exercice 53

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Corrigé exercice 53

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4x^3}$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
   Conclusion : $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.
   • Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
   $\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{n^4a^4}$ (majoration indépendante de x).
   Donc $||f_n||_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{b}{n^4a^4}$.
   De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).
   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

   • Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
   $\forall x \in [a,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{x}{n^4x^4} = \dfrac{1}{n^4x^3} \leqslant \dfrac{1}{n^4a^3}$ (majoration indépendante de x).
   Donc $||f_n||_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n^4a^3}$.
   De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).
   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

(c) On remarque que f_n est continue sur le compact $[0,1]$, donc f_n est bornée sur $[0,1]$.
De plus, d'après 1.(b), $\forall x \in [1,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^4}$, donc f_n est bornée sur $[1,+\infty[$.
On en déduit que f_n est bornée sur $[0,+\infty[$ et que $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \geqslant f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2n}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

Autre méthode :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{1-3n^4x^4}{(1+n^4x^4)^2}$.
On en déduit que f_n est croissante sur $\left]0, \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}, +\infty\right[$.
f_n étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_n est bornée.
Donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe et $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(\dfrac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}) = \dfrac{3^{\frac{3}{4}}}{4n}$.
Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$. (1)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$. (2)
Donc, d'après (1) et (2), f est continue sur $]0,+\infty[$.
Comme f est impaire, on en déduit que f est également continue sur $]-\infty,0[$.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4x^3}$.
D'après 1.(b), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.
Donc, d'après le cours, f admet une limite finie en $+\infty$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 54 analyse

Énoncé Exercice 54

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $||\;.\;||$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

Corrigé Exercice 54

1. La suite nulle appartient à E.
   Soit $(u,v) = ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \alpha v_n$. Montrons que $w \in E$.
   $u \in E$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $v \in E$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc $w \in E$.
   On en déduit que E est bien un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. (a) $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u||$ existe car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donc elle est bornée.
   $||.||$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
   i) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ telle que $||u|| = 0$.
   Alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = 0$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
   Donc $u = 0$.
   ii) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $||\lambda u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda u_n| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda||u_n|$.
   Comme $|\lambda| \geq 0$, on a donc par positive homogénéité de la borne supérieure,
   $||\lambda u|| = |\lambda| \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = |\lambda|\; ||u||$.
   iii) Soit $(u,v) = ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E^2$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant ||u|| + ||v||$ donc $||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$.

   (b) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant ||u||$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\dfrac{u_n}{2^{n+1}}| \leqslant \dfrac{||u||}{2^{n+1}}$.
   Or $\sum \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge (série géométrique de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue).
   Donc, par critère de majoration pour les séries à termes positifs, $\sum |\dfrac{u_n}{2^{n+1}}|$ converge.
   C'est-à-dire, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge absolument, donc converge.
   De plus, $|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{||u||}{2^{n+1}} = ||u||$.

   (c) f est clairement linéaire.
   Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
   Soit $N \in \mathbb{N}$.
   D'après l'inégalité triangulaire, $|\sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{||u||}{2^{n+1}}$.

C'est-à-dire, $|\sum_{n=0}^{N}\dfrac{u_n}{2^{n+1}}|\leqslant\sum_{n=0}^{N}\dfrac{||u||}{2^{n+1}}$.
D'après la question précédente, les deux termes de cette inégalité admettent une limite quand N tend vers $+\infty$.

Donc, en passant à la limite, on obtient, $|f(u)|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{||u||}{2^{n+1}}=||u||$.

C'est-à-dire, $\forall u\in E$, $|f(u)|\leqslant||u||$.

On en déduit que f est continue sur E.

EXERCICE 55 analyse

Énoncé exercice 55

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\text{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Corrigé exercice 55

1. (a) Montrons que E est un sous-espace-vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   La suite nulle appartient à E (obtenue pour $(u_0, u_1) = (0, 0)$).

   Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Montrons que $w = u + \lambda v \in E$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \lambda v_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}$.
   Or $(u, v) \in E^2$, donc $w_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n + \lambda\left(2av_{n+1} + 4(ia - 1)v_n\right)$
   c'est-à-dire $w_{n+2} = 2a\left(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}\right) + 4(ia - 1)\left(u_n + \lambda v_n\right)$
   ou encore $w_{n+2} = 2aw_{n+1} + 4(ia - 1)w_n$.
   Donc $w \in E$.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

   (b) On considère l'application φ définie par :
   $$\varphi : \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$
   Par construction, φ est linéaire et bijective.
   Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.
2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   On introduit l'équation caractéristique (E) : $r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = 0$.

   On a deux possibilités :
   — si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
   avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

   — si (E) a une unique racine double r, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha n + \beta)r^n$
   avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

   Le discriminant réduit de (E) est $\Delta' = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2$.

   Premier cas : $a = -2i$
   $r = a = -2i$ est racine double de (E).
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha n + \beta)(-2i)^n$.

   Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $1 = \beta$ et $1 = (\alpha + \beta)(-2i)$.
   On en déduit que $\alpha = \dfrac{i}{2} - 1$ et $\beta = 1$.

   Deuxième cas : $a \neq -2i$
   On a deux racines distinctes $r_1 = 2(a + i)$ et $r_2 = -2i$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(2(a + i)\right)^n + \beta\left(-2i\right)^n$.

   Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $2(a + i)\alpha - 2i\beta = 1$.
   On en déduit, après résolution, que $\alpha = \dfrac{1 + 2i}{2a + 4i}$ et $\beta = \dfrac{2a + 2i - 1}{2a + 4i}$.

EXERCICE 56 analyse

Énoncé exercice 56

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.

2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Corrigé exercice 56

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.
   Déterminons les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
   On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 6y$.
   $$\left\{\begin{array}{lcl} 6x^2+6y & = & 0 \\ 6x-6y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x(x+1) & = & 0 \\ y & = & x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x=0 & \text{et} & y=0 \\ \text{ou} & & \\ x=-1 & \text{et} & y=-1 \end{array}\right.$$
   Donc f admet 2 points critiques sur $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$ et $(-1,-1)$.
   Donc si f admet un extremum en a alors $a=(0,0)$ ou $a=(-1,-1)$.

   On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6$.
   Etudions la matrice hessienne de f en $(0,0)$.
   Notons $H_1 = H_f((0,0))$ la matrice hessienne de f en $(0,0)$.
   $H_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}$ donc $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.
   $\det H_1 = -36 < 0$.
   Donc H_1 admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.
   Donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
   Etudions la matrice hessienne de f en $(-1,-1)$.
   Notons $H_2 = H_f((-1,-1))$ la matrice hessienne de f en $(-1,-1)$.
   $H_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) \end{pmatrix}$ donc $H_2 = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.
   $\det H_2 = 12 \times 6 - 36 = 36 > 0$.
   De plus, $\operatorname{tr}(H_2) = -18 < 0$.
   Donc H_2 admet deux valeurs propres strictement négatives.
   Donc f admet en $(-1,1)$ un maximum local qui vaut $f(-1,-1) = 3$.

   Conclusion : f admet uniquement un maximum local atteint en $(-1,-1)$ et n'admet pas de minimum local.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 + 2 = -\infty$.
   Donc f n'admet pas d'extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$.
3. K est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.
   K est un produit de fermés de $\mathbb{R}^2$ donc K est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
   Donc, comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, K est un compact.
   Or f est clairement continue sur K.
   Donc$f$ est bornée sur K et atteint ses bornes.
   Donc f admet un maximum global sur K et atteint ce maximum.
   Si f atteint ce maximum en $a \in \mathring{K}$, qui est un ouvert, alors a est un point critique.
   Or, les deux seuls points critiques de f n'appartiennent pas à $\mathring{K}$.
   Donc f atteint son maximum en un point a du bord ∂K de K.

On pose :
$L_1 = \{(x,0)\ ,\ x \in [0,1]\}$, $L_2 = \{(1,y)\ ,\ y \in [0,1]\}$, $L_3 = \{(x,1)\ ,\ x \in [0,1]\}$ et $L_4 = \{(0,y)\ ,\ y \in [0,1]\}$.
On a alors : $\partial K = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$.

Etude de f sur L_1 :
$g_1(x) = f(x,0) = 2x^3 + 2$.
g_1 est croissante sur $[0,1]$.
Donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} g_1(x) = g_1(1) = 4$.

Etude de f sur L_2 :
$g_2(y) = f(1,y) = 4 + 6y - 3y^2$.
$\forall y \in [0,1]$, $g_2'(y) = 6 - 6y \geqslant 0$ donc g_2 est croissante sur $[0,1]$.
Donc $\sup\limits_{y\in[0,1]} g_2(x) = g_2(1) = 7$.

Etude de f sur L_3 :
$g_3(x) = f(x,1) = 2x^3 + 6x - 1$.
g_3 est croissante sur $[0,1]$.
Donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} g_3(x) = g_3(1) = 7$.

Etude de f sur L_4 :
$g_4(y) = f(0,y) = -3y^2 + 2$.
g_4 est décroissante sur $[0,1]$.
Donc $\sup\limits_{y\in[0,1]} g_4(y) = g_4(0) = 2$.

Conclusion :
On en déduit que f admet 7 comme maximum global sur K et que ce maximum est atteint en $(1,1)$.

EXERCICE 57 analyse

Énoncé exercice 57

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé exercice 57

1. (a) f est continue en $(0,0) \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| < \alpha \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.
   $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$ puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ (espace de dimension finie) .
   (b) f est différentiable en $(0,0) \Longleftrightarrow \exists L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) /$ au voisinage de $(0,0)$,
   $f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + o(\|(x,y)\|)$.

   Remarque : Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ alors $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
2. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
   On remarque que $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant \|(x,y)\|$ et $|y| \leqslant \|(x,y)\|$ (*).
   (a) $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto xy(x^2-y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

   Continuité en (0,0) :
   On a, en utilisant (*) et l'inégalité triangulaire, $|f(x,y) - f(0,0)| = \left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x|.|y| \leqslant \|(x,y)\|^2$.
   Donc f est continue en $(0,0)$.
   (b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

   f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
   De plus, $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$. (**)

   Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:
   $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   De même, $\forall\, y \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$, donc $\lim\limits_{y \to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

   Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:
   D'après (*) et (**), $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,
   $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{x^4|y| + 4x^2|y|^3 + |y|^5}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$.
   Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

   Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 58 analyse

Énoncé exercice 58

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
   Donner la définition de «f différentiable en a».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$ où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

   On pose : $\forall (x, y) \in E \times E,\ \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

   On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.

   Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) Prouver que : $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ /\ \forall\,(x, y) \in E \times E,\ |B(x, y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Corrigé exercice 58

1. Soit $f : E \mapsto F$ une application. Soit $a \in E$.
   f est différentiable en $a \iff \exists L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F)/$ au voisinage de 0, $f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$.
   Auquel cas, f est différentiable en a et $df(a) = L$.

   Remarque 1 : $||.||$ désigne une norme quelconque sur E car, comme E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.
   Remarque 2 : Comme E est de dimension finie, si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F)$.
2. (a) Soit $(x, y) \in E^2$.

   $\exists\,!\,(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n /\ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $\exists\,!\,(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n /\ y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$.

   Par bilinéarité de B, on a $B(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, e_j)$.

   Donc $|B(x, y)| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |x_i|.|y_j|.|B(e_i, e_j)| \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |B(e_i, e_j)| \right) \|x\|_\infty.\|y\|_\infty$.

   Alors $C = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |B(e_i, e_j)|$ convient .

   (b) Soit $(u_0, v_0) \in E \times E$.
   Par bilinéarité de B on a :
   $\forall (u, v) \in E \times E,\ B(u_0 + u, v_0 + v) = B(u_0, v_0) + B(u_0, v) + B(u, v_0) + B(u, v)$. (*)

   On pose $L((u, v)) = B(u_0, v) + B(u, v_0)$.

   Vérifions que L est linéaire sur $E \times E$.
   Soit $(x, y) \in E \times E$. Soit $(x', y') \in E \times E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $L\left((x, y) + \alpha(x', y')\right) = L((x + \alpha x', y + \alpha y')) = B((u_0, y + \alpha y')) + B((x + \alpha x', v_0))$.
   Donc par bilinéarité de B, $L\left((x, y) + \alpha(x', y')\right) = B((u_0, y)) + \alpha B((u_0, y')) + B((x, v_0)) + \alpha B((x', v_0))$.
   C'est-à-dire $L\left((x, y) + \alpha(x', y')\right) = L((x, y)) + \alpha L((x', y'))$.

   On en déduit que $L \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{R})$.
   Donc, comme $E \times E$ est de dimension finie, $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E \times E, \mathbb{R})$. (**)

   De plus, d'après 2.(a), $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ /\ \forall\,(x, y) \in E^2,\ |B(x, y)| \leqslant C\|(x\|_\infty \|y\|_\infty$.
   Donc $\forall\,(x, y) \in E^2,\ |B(x, y)| \leqslant C\|(x, y)\|^2$.
   On en deduit que, au voisinage de $(0, 0)$, $|B(x, y)| = o\left(\|(x, y)\|\right)$. (***)

   D'après (*),(**) et (***), B est différentiable en (u_0, v_0) et $\mathrm{d}B((u_0, v_0)) = L$.

BANQUE ALGÈBRE

EXERCICE 59 algèbre

Énoncé exercice 59

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f\,(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de E dans E de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f\,(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Corrigé exercice 59

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall\, P \in E\backslash\,\{0\}$, $\deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.
   Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.
   On en déduit que $\forall\, P \in E$, $\deg f(P) = \deg P$.
   Donc $f(E) \subset E$. (**)

   D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E.

   (a) Déterminons $\mathrm{Ker} f$.
   Soit $P \in \mathrm{Ker} f$.
   $f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.
   Or, d'après ce qui précéde, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.
   Donc $P = 0$.
   On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.
   Donc f est injectif.

   Or, $f \in \mathcal{L}\,(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.

   (b) Soit $e = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de E. Soit A la matrice de f dans la base e.
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}\,(\mathbb{R})\,.$$
   $\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.
   Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.
   D'après 1. : $\exists\,!P \in E$, tel que $f(P) = Q$.
   $P - P' = Q$, $P' - P'' = Q'$,..., $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.
   Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

3. Reprenons les notations de 1.(b).
   Tout revient à se demander si A est diagonalisable.
   Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.
   D'après 1.(b), on a $\chi_A = (X - 1)^{n+1}$.
   Donc 1 est l'unique valeur propre de A.
   Ainsi, si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice unité I_{n+1}.
   On aurait donc $A = \mathrm{I}_{n+1}$.
   Ce qui est manifestement faux car $f \neq \mathrm{Id}$.
   Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 60 algèbre

Énoncé exercice 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Corrigé exercice 60

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On a $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.
   Alors $M \in \mathrm{Ker} f \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathrm{Ker} f \iff \exists\,(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.
   On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. (*)
   On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\mathrm{Ker} f$.
   De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires ; donc (M_1, M_2) est libre.
   Donc (M_1, M_2) est une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.
   Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
   On en déduit que f est non surjectif.
3. Par la formule du rang, $\mathrm{rg} f = 2$.
   On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\mathrm{Im} f$.
   Comme $\mathrm{rg} f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\mathrm{Im} f$.
4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$. (1)

   Prouvons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.
   Soit $M \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.
   D'après 1. et 3., $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.
   On a donc $\begin{cases} -2a = c \\ -2b = 2d \\ a = 2c \\ b = 4d \end{cases}$.
   On en déduit que $a = b = c = d = 0$.
   Donc $M = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ (2)

   Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

EXERCICE 61 algèbre

Énoncé exercice 61

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $|| \ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\|A\|\,\|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?

Corrigé exercice 61

1. On remarque que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\| \geqslant 0$.
   i- Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $||A|| = 0$.
   Comme $\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j}| \geqslant 0$, on en déduit que $\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j}| = 0$, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$.
   Donc $A = 0$.
   ii- Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
   $\|\lambda A\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |\lambda a_{i,j}| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |\lambda|\,|a_{i,j}| = |\lambda| \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}| = |\lambda|\,\|A\|$.
   iii- Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
   On a $\|A+B\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j} + b_{i,j}|$.
   Or, $\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
   On en déduit que $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
2. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
   Posons $C = AB$.
   On a $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ avec $\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.
   Donc, $\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|c_{i,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.|b_{k,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \|A\|\,\|B\| = n\|A\|\,\|B\|$.
   On en déduit que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\|A\|\,\|B\|$. (*)
   Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, notons (P_p) la propriété : $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$.
   Prouvons que (P_p) est vraie par récurrence.
   Pour $p = 1$, $\|A^1\| = n^0\|A\|^1$, donc (P_1) est vraie.
   Supposons la propriété (P_p) vraie pour un rang $p \geqslant 1$, c'est-à-dire $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$.
   Prouvons que (P_{p+1}) est vraie.
   $\|A^{p+1}\| = \|A \times A^p\|$ donc, d'après (*), $\|A^{p+1}\| \leqslant n\|A\|\,\|A^p\|$.
   Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\|A^{p+1}\| \leqslant n\|A\|\,n^{p-1}\|A\|^p = n^p\|A\|^{p+1}$.
   On en déduit que (P_{p+1}) est vraie.
3. On a $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\left\|\dfrac{A^p}{p!}\right\| \leqslant \dfrac{1}{n}\dfrac{(n\|A\|)^p}{p!}$.
   Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum \dfrac{x^p}{p!}$ converge, donc $\sum \dfrac{(n||A||)^p}{p!}$ converge.
   Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ converge.

EXERCICE 62 algèbre

Énoncé exercice 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux.
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Corrigé exercice 62

1. f est linéaire donc :
   $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0 \Longleftrightarrow f \circ (f - \mathrm{Id}) = (f - \mathrm{Id}) \circ f = 2\mathrm{Id} \Longleftrightarrow f \circ (\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) = (\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) \circ f = \mathrm{Id}$.

   On en déduit que f est inversible, donc bijectif, et que $f^{-1} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}$.

2. (a) On pose $P = X^2 - X - 2$. On a $P = (X + 1)(X - 2)$.
   $P_1 = X + 1$ et $P_2 = X - 2$ sont premiers entre eux.
   Donc, d'après le lemme des noyaux, $\mathrm{Ker}P(f) = \mathrm{Ker}P_1(f) \oplus \mathrm{Ker}P_2(f)$.
   Or P est annulateur de f, donc $\mathrm{Ker}P(f) = E$.
   Donc $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

   (b) **Analyse (unicité) :**
   Soit $x \in E$. Supposons que $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Alors par linéarité de f, $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$.
   On en déduit que $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.

   Synthèse (existence) :
   Soit $x \in E$. On pose $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.
   On a bien $x = a + b$. (*)
   $(f + \mathrm{Id})(a) = \dfrac{1}{3}\left(2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)\right) = \dfrac{1}{3}\left(-f^2(x) + f(x) + 2x\right) = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. (**)

   $(f - 2\mathrm{Id})(b) = \dfrac{1}{3}\left(f(x) + f^2(x) - 2x - 2f(x)\right) = \dfrac{1}{3}\left(f^2(x) - f(x) - 2x\right) = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

   Conclusion : $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

3. Prouvons que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id})$.
   $\exists\, x \in E \,/\, y = f(x) + x$.
   Alors $(f - 2\mathrm{Id})(y) = f(y) - 2y = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Donc $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (*)
   Posons $\dim E = n$.
   D'après 2., $n = \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id})$.
   On en déduit que $\dim \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (**)

   Donc, d'après (*) et (**), $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

EXERCICE 63 algèbre

Énoncé exercice 63

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
ii. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

Corrigé exercice 63

1. On se place sur $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.
On considère u la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On a bien $\forall x \in E$,$(u(x)|x) = 0$ mais u n'est pas l'endomorphisme nul.

2. Prouvons que i. $\Longleftrightarrow$ ii.
Procédons par double implication.

Supposons que $u \circ u^* = u^* \circ u$.
Prouvons que $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Soit $(x, y) \in E^2$.
Par définition de l'adjoint, $(u(x)|u(y)) = (x|u^* \circ u(y))$.
Or, par hypothèse, $u \circ u^* = u^* \circ u$.
Donc $(u(x), u(y)) = (x|u \circ u^*(y))$.
Or, par définition de l'adjoint, $(x|u \circ u^*(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Donc $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.

Supposons que $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Prouvons que $u \circ u^* = u^* \circ u$.
Soit $x \in E$.
Prouvons que $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \in E^\perp$.
Soit $y \in E$.
Par bilinéarité du produit scalaire, $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x)|y) = (u \circ u^*(x)|y) - (u^* \circ u(x)|y)$.
Or, par définition de l'adjoint, $(u \circ u^*(x)|y) = (u^*(x)|u^*(y))$ et $(u^* \circ u(x)|y) = (u(x)|u(y))$.
Donc $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x)|y) = (u^*(x)|u^*(y)) - (u(x)|u(y))$.
Or, par hypothèse, $(u^*(x)|u^*(y)) = (u(x)|u(y))$.
Donc $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x)|y) = (u(x)|u(y)) - (u(x)|u(y)) = 0$.
Donc $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \in E^\perp$.
Or $E^\perp = \{0\}$.
Donc $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) = 0$.

Prouvons que ii. $\Longleftrightarrow$ iii.
Procédons par double implication.

On suppose que $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Donc, en prenant $y = x$, on obtient : $\forall x \in E$, $||u(x)||^2 = ||u^*(x)||^2$.
Or, $\forall x \in E$, $||u(x)| \geqslant 0$ et $||u^*(x)|| \geqslant 0$.
Donc $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

On suppose que $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.
Prouvons que $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Soit $(x, y) \in E^2$.

D'après une identité de polarisation, $(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(||u(x)+u(y)||^2 - ||u(x)||^2 - ||u(y)||^2\right)$.
Or, u est linéaire donc $||u(x)+u(y)||^2 = ||u(x+y)||^2$.
De plus par hypothèse, $||u(x+y)|| = ||u^*(x+y)||$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$ et $||u(y)|| = ||u^*(y)||$.
Donc $(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(||u^*(x+y)||^2 - ||u^*(x)||^2 - ||u^*(y)||^2\right)$.
Or u^* est linéaire donc $||u^*(x+y)|| = ||u^*(x)+u^*(y)||$.
Donc $(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(||u^*(x)+u^*(y))||^2 - ||u^*(x)||^2 - ||u^*(y)||^2\right)$.
Or, d'après une identité de polarisation, $(u^*(x)|u^*(y)) = \frac{1}{2}\left(||u^*(x)+u^*(y))||^2 - ||u^*(x)||^2 - ||u^*(y)||^2\right)$.
Donc $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.

EXERCICE 64 algèbre

Énoncé exercice 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Corrigé exercice 64

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
   Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)

   Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $y \in \mathrm{Im} f$.
   Alors, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\, (a, b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
   On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)

   D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
   On en déduit que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f \Longleftrightarrow \mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg} f$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$.
   Alors, en utilisant le théorème du rang,
   $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

   (b) Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

   Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.
   $\exists\, a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
   On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker} f^2$.
   Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$ donc $a \in \mathrm{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. (***)

   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$. (****)

   Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

EXERCICE 65 algèbre

Énoncé exercice 65

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
   (P polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Corrigé exercice 65

1. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
   $P = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p X^p$ et $Q = \sum\limits_{q=0}^{m} b_q X^q$.
   Donc $PQ = \sum\limits_{p=0}^{n} \sum\limits_{q=0}^{m} \left(a_p b_q X^{p+q}\right)$.
   Donc $(PQ)(u) = \sum\limits_{p=0}^{n} \sum\limits_{q=0}^{m} \left(a_p b_q u^{p+q}\right)$ (*)
   Or $P(u) \circ Q(u) = \left(\sum\limits_{p=0}^{n} a_p u^p\right) \circ \left(\sum\limits_{q=0}^{m} b_q u^q\right) = \sum\limits_{p=0}^{n} \left(a_p u^p \circ \sum\limits_{q=0}^{m} b_q u^q\right)$.
   Donc, par linéarité de u, $P(u) \circ Q(u) = \sum\limits_{p=0}^{n} \left(\sum\limits_{q=0}^{m} a_p u^p \circ b_q u^q\right) = \sum\limits_{p=0}^{n} \sum\limits_{q=0}^{m} \left(a_p b_q u^{p+q}\right)$. (**)
   D'après (*) et (**), $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
   D'après 1., $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$.
   De même, d'après 1., $Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$.
   Or $PQ = QP$ donc $(PQ)(u) = (QP)(u)$.
   On en déduit que $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
   On suppose que P est annulateur de u.
   Prouvons que PQ est annulateur de u.
   D'après 1. , $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
   Or P est annulateur de u donc $P(u) = 0$ donc $(PQ)(u) = 0$.
   On en déduit que PQ est annulateur de u.
3. Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A.
   $P_A(X) = \det(XI_2 - A)$. On trouve $P_A(X) = X(X-1)$.
   Soit $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$.
   On remarque que $R(0) = R(1) = 0$ et on en déduit que R est factorisable par $X(X-1)$.
   C'est-à-dire : $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X]\ /\ R = X(X-1)Q$.
   Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(X) = X(X-1)$ annule A.
   Donc, d'après 2.b., comme $R = P_A(X)Q$, R est annulateur de A.

EXERCICE 66 algèbre

Énoncé exercice 66

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Corrigé exercice 66

On introduit, sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la norme euclidienne, notée $||\ ||$, associée au produit scalaire canonique, définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||X|| = \sqrt{X^T X}$.

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
Raisonnons par double implication.

   Supposons que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouvons que $\mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
   Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$.
   $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\ /\ AX = \lambda X$.
   Alors $X^T AX = X^T \lambda X = \lambda ||X||^2$.
   Or, $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc $X^T AX \geqslant 0$.
   Donc $\lambda ||X||^2 \geqslant 0$.
   Or, $X \neq 0$ donc $||X||^2 > 0$.
   Donc $\lambda \geqslant 0$.

   Supposons que $\mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
   Prouvons que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral, $\exists P \in \mathrm{O}(n)\ /\ A = PDP^T$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.
   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   $X^T AX = X^T PDP^T X = (P^T X)^T D (P^T X)$.
   Notons $y_1, y_2, ..., y_n$ les composantes de la matrice colonne $Y = P^T X$.
   Ainsi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ et donc $X^T AX = Y^T DY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. (1)
   Or, λ_1, λ_2,...,λ_n sont les valeurs propres de A donc, par hypothèse, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
   Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i y_i^2 \geqslant 0$.
   Donc, d'après (1), $X^T AX \geqslant 0$.
2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.

   $\left(A^2\right)^T = A^T A^T$.
   Or, $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc $A^T = A$. Donc $\left(A^2\right)^T = A^2$. Donc $A^2 \in S_n(\mathbb{R})$.

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   $X^T A^2 X = X^T A^T AX = (AX)^T (AX) = ||AX||^2 \geqslant 0$.
   Donc $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
$A \in S_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral et 1. :
$\exists P \in \mathrm{O}(n)\ /\ A = PDP^T$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
On pose $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right)$.
Alors $A = P\Delta^2 P^T = P\Delta P^T P\Delta P^T$ car $P^T = P^{-1}$.
C'est-à-dire, $A = \left(P\Delta P^T\right)^2$.

On pose alors $B = P\Delta P^T$.
On a $A = B^2$.
De plus, $B^T = \left(P^T\right)^T \Delta^T P^T = P\Delta P^T = B$ donc $B \in S_n(\mathbb{R})$.
De plus, B est semblable à Δ donc $\operatorname{sp}(B) = \left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right\}$ et donc $\operatorname{sp}(B) \subset [0, +\infty[$.
Donc $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

EXERCICE 67 algèbre

Énoncé exercice 67

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Corrigé exercice 67

$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M)$.
Après calculs, on trouve, $\chi_M = X(X^2 + ca - ba - bc)$.

Premier cas : $ca - ba - bc < 0$
M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car M possède trois valeurs propres réelles distinctes.
Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Deuxième cas : $ca - ba - bc = 0$
Alors, 0 est la seule valeur propre de M.
Ainsi, si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$. Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc M est diagonalisable.
On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.

Troisième cas : $ca - ba - bc > 0$
Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
En revanche, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

EXERCICE 68 algèbre

Énoncé exercice 68

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de trois manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en déterminant le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres.
   (c) en calculant A^2.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.
   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Corrigé exercice 68

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   (b) On obtient, après calculs, $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
   $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.
   Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   Autre méthode :
   $\mathrm{rg} A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
   On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A.
   Puisque $\mathrm{tr} A = 3$ et que $\mathrm{tr} A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
   Et donc $\chi_M(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
   On peut conclure à nouveau que A est diagonalisable car :
   $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (c) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.
2. On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On note $(\,|\,)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
   Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   A est symétrique réelle et e est une base orthonormée pour $(\,|\,)$, donc f est un endomorphisme autoadjoint.
   Donc, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver une base orthonormée de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormée de vecteurs propres.
   $E_3(f) = \mathrm{Vect}((1, -1, 1)$ et $E_0(f) : x - y + z = 0$.
   Donc $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ est une base orthonormée de $E_3(f)$.
   $(1, 1, 0)$ et $(1, -1, -2)$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$.
   On les normalise et on pose $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et $w = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)$.
   Alors (v, w) est une base orthonormée de $E_0(f)$.

   Or, $E = E_3(f) \oplus E_0(f)$ (car f diagonalisable) et $E_3(f) \perp E_0(f)$ donc (u, v, w) est une base orthonormée de vecteurs propres de f.

EXERCICE 69 algèbre

Énoncé exercice 69

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé exercice 69

1. Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.
   Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
   Alors, $\det A \neq 0$ donc A est inversible.
   Donc $\mathrm{rg} A = 3$.
   Deuxième cas : $a = 0$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg} A = 2$.

   Troisième cas : $a = -1$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg} A \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires.
   Or $\det A = 0$ donc $\mathrm{rg} A \leqslant 2$.
   On en déduit que $\mathrm{rg} A = 2$.
2. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.
   $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$
   Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1+a & \lambda + 1 \end{vmatrix}$.
   Donc, en développant par rapport à la première colonne,
   $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1)$.
   Donc $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$.
   Les racines de χ_A sont $a + 1$, $-a$ et -1.
   $a + 1 = -a \iff a = -\dfrac{1}{2}$.
   $a + 1 = -1 \iff a = -2$.
   $-a = -1 \iff a = 1$.
   Ce qui amène aux quatre cas suivants :

   Premier cas : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$
   Alors A admet trois valeurs propres disctinctes.
   Donc A est diagonalisable.
   Deuxième cas : $a = 1$
   $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$.
   Alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Or $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Donc A est diagonalisable.

   Autre méthode :

A est symétrique réelle donc diagonalisable.

Troisième cas : $a = -2$
Alors, $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$.
$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Les deux premières colonnes de $A + \mathrm{I}_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
De plus, -1 est valeur propre de A, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$.
Or l'ordre multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique est 2.
On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Quatrième cas : $a = -\dfrac{1}{2}$
$\chi_A = (X - \dfrac{1}{2})^2(X+1)$.
$A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Les deux premières colonnes de $A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
De plus, $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre donc $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$.
Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\dfrac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A est non diagonalisable.

EXERCICE 70 algèbre

Énoncé exercice 70

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Corrigé exercice 70

1. $\chi_A = X^3 - 1$ donc $\mathrm{Sp}A = \left\{1, j, j^2\right\}$.
   On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes.
   On pose $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3)$, $E_j(A) = \mathrm{Ker}(A - j\mathrm{I}_3)$ et $E_{j^2}(A) = \mathrm{Ker}(A - j^2\mathrm{I}_3)$.
   Après résolution, on trouve $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_j(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right)$.
   Et, par conjugaison (comme A est à coefficients réels), $E_{j^2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   On pose $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, j^2, j)$, $e'_3 = (1, j, j^2)$ et $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
   D'après 1., e' est une base de vecteurs propres pour f.
   Soit P la matrice de passage de e à e'. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.
   Alors, $D = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$.
   On en déduit que $B = a\mathrm{I}_3 + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P\left(aI_3 + bD + cD^2\right)P^{-1}$.
   C'est-à-dire, si on pose $Q = a + bX + cX^2$, alors $B = P\begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(j) & 0 \\ 0 & 0 & Q(j^2) \end{pmatrix}P^{-1}$.
   On en déduit que B est diagonalisable et que les valeurs propres, distinctes ou non, de B sont $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

   Premier cas : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont deux à deux distincts

   B possède trois valeurs propres distinctes : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.
   De plus, on peut affirmer que :
   $E_{Q(1)}(B) = E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $E_{Q(j)}(B) = E_j(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right)$ et
   $E_{Q(j^2)}(B) = E_{j^2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)$.

   Deuxième cas : deux valeurs exactement parmi $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont égales.

   Supposons par exemple que $Q(1) = Q(j)$ et $Q(j^2) \neq Q(1)$.
   B possède deux valeurs propres distinctes : $Q(1)$ et $Q(j^2)$.
   De plus, on peut affirmer que :
   $E_{Q(1)}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right)$ et $E_{Q(j^2)}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)$.

   Troisième cas : $Q(1) = Q(j) = Q(j^2)$.

   B possède une unique valeur propre : $Q(1)$.
   De plus, on peut affirmer que $B = Q(1)\mathrm{I}_3$ et $E_{Q(1)}(B) = \mathbb{C}^3$.

EXERCICE 71 algèbre

Énoncé exercice 71

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Corrigé exercice 71

1. $D=\mathrm{Vect}\left((1,2,3)\right)$.
   $(1,2,3)\notin P$ car les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ ne vérifient pas l'équation de P.
   Donc $D\cap P=\{0\}$. (*)
   De plus, $\dim D+\dim P=1+2=\dim\mathbb{R}^3$. (**)
   D'après (*) et (**), $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.
2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Par définition d'une projection, $p(u)\in P$ et $u-p(u)\in D$.
   $u-p(u)\in D$ signifie que $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $u-p(u)=\alpha(1,2,3)$.
   On en déduit que $p(u)=(x-\alpha,y-2\alpha,z-3\alpha)$. (***)
   Or $p(u)\in P$ donc $(x-\alpha)+(y-2\alpha)+(z-3\alpha)=0$, c'est-à-dire $\alpha=\dfrac{1}{6}(x+y+z)$.
   Et donc, d'après (***), $p(u)=\dfrac{1}{6}(5x-y-z,-2x+4y-2z,-3x-3y+3z)$.

   Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Soit A la matrice de p dans la base e. On a $A=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-2&4&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}$.
3. On pose $e_1'=(1,2,3)$, $e_2'=(1,-1,0)$ et $e_3'=(0,1,-1)$.
   e_1' est une base de D et (e_2',e_3') est une base de P.
   Or $\mathbb{R}^3=P\oplus D$ donc $e'=(e_1',e_2',e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   De plus $e_1'\in D$ donc $p(e_1')=0$. $e_2'\in P$ et $e_3'\in P$ donc $p(e_2')=e_2'$ et $p(e_3')=e_3'$.

   Ainsi, $M(p,e')=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 72 algèbre

Énoncé exercice 72

Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Corrigé exercice 72

1. Si $v = 0_E$ alors f est l'endomorphisme nul et donc $\mathrm{rg} f = 0$.
   Si $v \neq 0$ alors $\mathrm{rg} f = 1$ car, si on note $c_1, c_2, ..., c_n$ les colonnes de la matrice A de f dans la base e, alors $c_1 \neq 0$ et $c_1 = c_2 = ... = c_n$.
2. On note χ_f le polynôme caractéristique de f.

   Premier cas : $v = 0_E$
   alors f est l'endomorphisme nul et donc f est diagonalisable.

   Deuxième cas : $v \neq 0_E$.
   Alors $\mathrm{rg} f = 1$ et donc $\dim \mathrm{Ker} f = n - 1$.
   Donc 0 est valeur propre de f et, si on note m_0 l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 dans le polynôme caractéristique de f, alors $m_0 \geqslant n - 1$.
   On en déduit alors que : $\exists \lambda \in \mathbb{K} \,/\, \chi_f = X^{n-1}(X - \lambda)$. (*)
   Et donc, $\mathrm{tr}(f) = \lambda$.
   e est une base de E donc : $\exists\,! \, (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$.
   En écrivant la matrice de f dans la base e, on obtient alors $\mathrm{tr}(f) = x_1 + x_2 + ... + x_n$.
   Ainsi, $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$. (**)
   Ce qui amène à la discussion suivante :

   Premier sous- cas : si $x_1 + x_2 + ... + x_n \neq 0$
   D'après (*) et (**), $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$ est une valeur propre non nulle de f et $\dim E_\lambda = 1$.
   Ainsi, $\dim E_0 + \dim E_\lambda = n$ et donc f est diagonalisable.

   Deuxième sous- cas : si $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$
   Alors, d'après (*) et (**), $\chi_f = X^n$.
   Donc 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité n dans le polynôme caractéristique.
   Or $\dim E_0 = n - 1$.
   Donc f n'est pas diagonalisable.

   Remarque dans le cas où $v \neq 0$
   Comme $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$, alors, par linéarité de f, $f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_n f(e_n)$.
   C'est-à-dire, $f(v) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)v$. (***)
   On en déduit que : $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \Longleftrightarrow f(v) = 0$.
   De plus, dans le cas où $x_1 + x_2 + ...x_n \neq 0$, alors, d'après (***), v est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$ et d'après ce qui précéde, $E_f(\lambda) = \mathrm{Vect}(v)$.

EXERCICE 73 algèbre

Énoncé exercice 73

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

Corrigé exercice 73

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\mathrm{Sp}A = \{-2, 3\}$.
   Après résolution des équations $AX = 3X$ et $AX = -2X$, on obtient :
   $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $ND = DN \iff \left\{ \begin{array}{lcl} -2b & = & 3b \\ 3c & = & -2c \end{array} \right. \iff b = c = 0 \iff N$ diagonale.

   On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D.
   C'est-à-dire, $AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$.
   Donc, l'espace des matrices commutant avec A est $C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
   donc $\dim C(A) = 2$.
   Pour le justifier, on peut vérifier que : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & C(A) \\ (a, b) & \longmapsto & P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \end{array}$ est un isomorphisme.

   De plus, ($\mathrm{I}_2 \in C(A)$ et $A \in C(A)$) donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A) \subset C(A)$.
   De plus, $\dim C(A) = \dim \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A) = 2$.

   On en déduit que $C(A) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)$.

EXERCICE 74 algèbre

Énoncé exercice 74

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Corrigé exercice 74

1. (a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.

   (b) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} -1+\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1+\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1+\lambda \end{vmatrix}$.

   En développant par rapport à la première ligne, on obtient, après factorisation :
   $\chi_A = (X-1)(X+1)(X-3)$.

   On obtient aisément, $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   On pose $e'_1 = (0,1,0)$, $e'_2 = (1,0,-1)$ et $e'_3 = (1,0,1)$.

   Alors, $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A.

2. Notons (S) le système $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$.

   Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

   Alors, $(S) \iff X' = AX$.

   On note P la matrice de passage de la base canonique e de $\mathbb{R}^3$ à la base e'.

   D'après 1., $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Et, si on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.

   Donc $(S) \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$.

   On pose alors $X_1 = P^{-1}X$ et $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$.

   Ainsi, par linéarité de la dérivation, $(S) \iff X'_1 = DX_1 \iff \begin{cases} x'_1 & = & x_1 \\ y'_1 & = & -y_1 \\ z'_1 & = & 3z_1 \end{cases}$

   On résout alors chacune des trois équations différentielles d'ordre 1 qui constituent ce système.

   On trouve $\begin{cases} x_1(t) & = & a\mathrm{e}^{t} \\ y_1(t) & = & b\mathrm{e}^{-t} \\ z_1(t) & = & c\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

   Enfin, on détermine x, y, z en utilisant la relation $X = PX_1$.

On obtient : $\begin{cases} x(t) &= b\mathrm{e}^{-t} + c\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) &= a\mathrm{e}^{t} \\ z(t) &= -b\mathrm{e}^{-t} + c\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 75 algèbre

Énoncé exercice 75

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Corrigé exercice 75

1. On note χ_A le polynôme caractéristique de A.
   On obtient, après calculs, $\chi_A = (X-1)^2$, donc $\mathrm{Sp}A = \{1\}$.
   Si A était diagonalisable, alors A serait semblable à I_2, donc égale à I_2.
   Ce n'est visiblement pas le cas et donc A n'est pas diagonalisable.
2. $\chi_A(X)$ étant scindé, A est trigonalisable.
   $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   On pose $v_1 = (2, -1)$.
   On a déjà $f(v_1) = v_1$.

   On pose $v_2 = (-1, 0)$.
   $A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   donc $f(v_2) = v_1 + v_2$.

   De plus, v_1 et v_2 sont non colinéaires donc la famille $v = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Notons T la matrice de f dans la base v.
   Ainsi :
   $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On a $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   Le système différentiel étudié équivaut à l'équation $X' = AX$ qui équivaut encore , grâce à la linéarité de la dérivation, à l'équation $Y' = TY$.

   Cela nous amène à résoudre le système $\begin{cases} a' = a + b \\ b' = b \end{cases}$ de solution générale $\begin{cases} a(t) = \lambda \mathrm{e}^t + \mu t \mathrm{e}^t \\ b(t) = \mu \mathrm{e}^t \end{cases}$
   Enfin, par la relation $X = PY$ on obtient la solution générale du système initial :
   $\begin{cases} x(t) = \left((2\lambda - \mu) + 2\mu t\right) \mathrm{e}^t \\ y(t) = (-\lambda - \mu t)\, \mathrm{e}^t \end{cases}$

EXERCICE 76 algèbre

Énoncé exercice 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Corrigé exercice 76

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$
   Preuve :
   Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = ||x + \lambda y||^2$.
   On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
   De plus, $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y)$.
   Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda\,(x|y) + ||x||^2$.
   On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors $|\,(x|y)\,| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
   Deuxième cas : $y \neq 0$
   Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
   On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
   Or $\Delta = (x|y)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $(x|y)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
   Et donc, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$.

   (b) On reprend les notations de 1. .
   Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y|| \iff x$ et y sont colinéaires.

   Supposons que $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y||$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors x et y sont colinéaires.
   Deuxième cas : si $y \neq 0$
   Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
   C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(\,|\,)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
   Donc x et y sont colinéaires.

   Supposons que x et y soient colinéaires.
   Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
   Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
   $|\,(x|y)\,| = |\alpha|.|\,(y|y)\,| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
   Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
   $\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
   On pose $A = \left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$.
   $A \subset \mathbb{R}$.
   $A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).

De plus, $\forall\, f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.

On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.
Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\displaystyle\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2$.

D'une part, $\displaystyle\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$.

D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\,|\,)$ on obtient :
$\displaystyle\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

On en déduit que $\forall\, f \in E$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.
Donc $m \geqslant (b-a)^2$.

Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
Donc $m = (b-a)^2$.

EXERCICE 77 algèbre

Énoncé exercice 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Corrigé exercice 77

1. On a $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. (*)
   En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^{\perp}, (x \mid y) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in A,\ x \in (A^{\perp})^{\perp}$.

   Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^{\perp}$ donc $\dim A = n - \dim A^{\perp}$.
   De même, $E = A^{\perp} \oplus \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ donc $\dim \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim A^{\perp}$.
   Donc $\dim \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \dim A$. (**)

   D'après (*) et (**), $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. (a) Procédons par double inclusion.

   Prouvons que $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.
   Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   Soit $y \in F + G$.
   Alors $\exists\,(f,g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$.
   $$(x \mid y) = \underbrace{(x \mid f)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \in F \text{ et } x \in F^{\perp}}} + \underbrace{(x \mid g)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g \in G \text{ et } x \in G^{\perp}}} = 0.$$
   Donc $\forall\, y \in (F+G),\ (x \mid y) = 0$.
   Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.

   Prouvons que $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   Soit $x \in (F+G)^{\perp}$.
   $\forall\, y \in F$, on a $(x \mid y) = 0$ car $y \in F \subset F + G$.
   Donc $x \in F^{\perp}$.
   De même, $\forall\, z \in G$, on a $(x \mid z) = 0$ car $z \in G \subset F + G$.
   Donc $x \in G^{\perp}$.
   On en déduit que $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   Finalement, par double inclusion, $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   (b) D'après 2.(a), appliquée à $F^{\perp}$ et à $G^{\perp}$, on a $\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \cap \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$.
   Donc, d'après 1., $\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp} = F \cap G$.
   Donc $\left(\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.
   C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

EXERCICE 78 algèbre

Énoncé exercice 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.
   C'est -à-dire $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)\ /\ \forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||\}$.

   Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Corrigé exercice 78

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Soit $(x,y) \in E^2$.
   On a, d'une part, $\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$. (*)
   D'autre part,
   $\|u(x+y)\|^2 = \|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|y\|^2$. (**)
   On en déduit, d'après (*) et (**), que $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
   (b) Soit $x \in \mathrm{Ker} u$.
   Par hypothèse, $0 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$.
   Donc $x = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker} u = \{0_E\}$.
   Donc u est injectif.
   Puisque E est de dimension finie, on peut conclure que l'endomorphisme u est bijectif.
2. Montrons que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.
   On a $\mathcal{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ en vertu de ce qui précède.
   On a aussi, évidemment, $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$. Donc $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$.
   Soit $(u,v) \in (\mathcal{O}(E))^2$.
   $\forall\, x \in E$, $\left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \left\|u(v^{-1}(x))\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.
   Et $\left\|v^{-1}(x)\right\| = \left\|v(v^{-1}(x))\right\| = \|x\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.
   Donc $\forall\, x \in E$, $\left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \|x\|$.
   On en déduit que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.

   Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$.
   Soit $(i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$.
   $u \in \mathcal{O}(E)$ donc, d'après 1.(a), $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j)$.
   Or e est une base orthonormée de E donc $(e_i|e_j) = \delta_i^j$ où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.
   On en déduit que $\forall (i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$,$(u(e_i)|u(e_j)) = \delta_i^j$.
   C'est-à-dire $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une famille orthonormée de E.
   Donc, c'est une famille libre à n éléments de E avec $\dim E = n$.
   Donc $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

   Réciproquement, supposons que $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.
   Soit $x \in E$.
   Comme e est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$||x||^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, (e_i|e_j).$

Or e est une base orthonormée de E donc $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (*)

De même, par linéarité de u, $||u(x)||^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) | \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, (u(e_i)|u(e_j))$.

Or $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E, donc $||u(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (**)

D'après (*) et (**), $\forall\, x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$.
Donc $u \in \mathcal{O}(E)$.

EXERCICE 79 algèbre

Énoncé exercice 79

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\,(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corrigé exercice 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.
   On pose $\forall\, x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
   h est continue sur $[a, b]$ donc F est dérivable sur $[a, b]$.
   De plus, $\forall\, x \in [a, b]$, $F'(x) = h(x)$.
   Or h est positive sur $[a, b]$ donc F est croissante sur $[a, b]$. (*)
   Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)

   D'après (*) et (**), F est constante sur $[a, b]$.
   Donc $\forall\, x \in [a, b]$, $F'(x) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in [a, b]$, $h(x) = 0$.
2. On pose $\forall\,(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

   Soit $f \in E$. $(f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.
   Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a, b]$ et $a < b$ donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)

   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.
   Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a, b]$.
   Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a, b]$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

EXERCICE 80 algèbre

Énoncé exercice 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Corrigé exercice 80

1. On pose $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

   Soit $f \in E$. $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)

   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.
   Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.
   Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
   $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \in F$.
   De plus, si on note h l'application $x \mapsto \dfrac{1}{2}$,
   $(h|f) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \mathrm{d}x = 0$ et $(h|g) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^\perp$ (car $F = \mathrm{Vect}(f, g)$).

   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

EXERCICE 81 algèbre

Énoncé exercice 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Corrigé exercice 81

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,
   $M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \operatorname{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)||$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

EXERCICE 82 algèbre

Énoncé exercice 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Corrigé exercice 82

1. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $(A + A'|B) = \left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = (a + a')a'' + (b + b')b'' + (c + c')c'' + (d + d')d''$.
   Donc $(A + A'|B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A|B) + (A'|B)$.
   $(\alpha A|B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha\,(A|B)$.
   On en déduit que $(\,.\,|\,.\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,.\,|\,.\,)$ est symétrique.
   Donc $(\,.\,|\,.\,)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.
   $(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$. Donc $(.\,|\,.)$ est positive. (**)

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A|A) = 0$.
   Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.
   Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.
   Donc $(\,.\,|\,.\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur E.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$ car $\forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = 0$.

   On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $d(A, F) = ||A - p_F(A)|| = || \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} || = 1$.

Exercice 83 algèbre

Énoncé exercice 83

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

Corrigé exercice 83

1. Soit $\lambda \neq 0$.
   Si λ valeur propre de $u \circ v$ alors $\exists\, x \in E \setminus \{0\} \,/\, (u \circ v)(x) = \lambda x$. $(*)$
   Pour un tel x non nul, on a alors $v(u \circ v(x)) = \lambda v(x)$ c'est-à-dire $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$ $(**)$.
   Si $v(x) = 0$ alors, d'après $(*)$, $\lambda x = 0$. Ce qui est impossible car $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0$.
   Donc $v(x) \neq 0$.
   Donc, d'après $(**)$, $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à la valeur propre λ.
2. On trouve que $v \circ u = \mathrm{Id}$ et $u \circ v : P \longmapsto P(X) - P(1)$.
   Ainsi $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$.
   On observe que 0 est valeur propre de $u \circ v$ mais n'est pas valeur propre de $v \circ u$.
   On constate donc que le résultat de la question 1. est faux pour $\lambda = 0$.
3. Si E est de dimension finie, comme $\det(u \circ v) = \det u \, \det v = \det(v \circ u)$ alors :
   0 est valeur propre de $u \circ v \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff$ 0 est valeur propre de $v \circ u$.

   Remarque 1 : le résultat de la question 1. est vrai pour $\lambda = 0$ si et seulement si E est de dimension finie.
   Remarque 2 : Si E est de dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

EXERCICE 84 algèbre

Énoncé exercice 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Corrigé exercice 84

1. Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   Un argument de z est un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $z = 0$ n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$.
   Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   On a $z^n = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\theta = 0 \mod 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
   Les réels $\dfrac{2k\pi}{n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts et $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$.
   Or $\begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{array}$ est injective.
   Donc, $\left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ est constitué de n solutions distinctes de l'équation $z^n = 1$.
   Les solutions de l'équation $z^n = 1$ étant également racines du polynôme $X^n - 1$, il ne peut y en avoir d'autres.
   Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est $S = \left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
3. $z = i$ n'étant pas solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$,

$$
\begin{aligned}
(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n &\iff \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)
\end{aligned}
$$

   En remarquant que $z\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)$ n'admet pas de solution pour $k = 0$, on en déduit que :

$$
(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \iff \exists\, k \in [\![1, n-1]\!] \text{ tel que } z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}-1}
$$

   En écrivant $\mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}-1} = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}} = \mathrm{i}\,\dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, on voit que les solutions sont des réels.

   On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ alors $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$ et donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A, B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-\mathrm{i}$, c'est-à-dire à la droite des réels.

EXERCICE 85 algèbre

Énoncé exercice 85

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Corrigé exercice 85

1. (a) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
   (b)

$$\begin{aligned}
a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X] \text{ tel que } Q(a) \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r Q \\
&\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^i \\
&\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^{r+i} \\
&\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{k=r}^{n} q_{k-r} (X-a)^k
\end{aligned}$$

   D'après la formule de Taylor (rappelée ci-dessus) et l'unicité de la décomposition de P dans la base $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ il vient enfin :

$$a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \forall k \in \{0, \dots, r-1\} \quad P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } \quad P^{(r)}(a) \neq 0$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX &\iff P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0 \\
&\iff \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases} \\
&\iff a = -4 \text{ et } b = 3
\end{aligned}$$

   On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2 + 2X + 3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.

EXERCICE 86 algèbre

Énoncé exercice 86

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\dbinom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Corrigé exercice 86

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.
   D'après le théorème de Bézout,
   $\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_1 p + v_1 a = 1$. (1)
   $\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_2 p + v_2 b = 1$. (2)
   En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :
   $\underbrace{(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}} (ab) = 1$.
   Donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. $\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$.
   Donc $\dbinom{p}{k} k! = p(p-1)...(p-k+1)$.
   donc $p \mid \dbinom{p}{k} k!$. (3)
   Or, $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $p \wedge i = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$.
   Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\Longrightarrow p \mid \dbinom{p}{k}$.
   (b) Procédons par récurrence sur n.
   Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que la propriété (P_n) : $n^p \equiv n \mod p$ soit vérifiée.
   Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \dbinom{p}{k} n^k + 1$. (4)
   Or $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \dbinom{p}{k}$ donc $p \mid \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \dbinom{p}{k} n^k$.
   Donc d'après (4) et (P_n), $(n+1)^p \equiv n + 1 \mod p$ et (P_{n+1}) est vraie.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n.
   Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$.
   La question précédente donne p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.
   Or comme p est premier avec n, on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$.
   Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$. (petit théorème de Fermat).

EXERCICE 87 algèbre

Énoncé exercice 87

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Corrigé exercice 87

1. L'application $u : \begin{array}{lll} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)) \end{array}$ est linéaire.
Montrons que $\mathrm{Ker} u = \{0\}$.

   Si $P \in \mathrm{Ker} u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, admet $n+1$ racines distinctes.
Donc $P = 0$.
Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \ldots, b_n)$.

   La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \ldots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \cdots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

   Comme $a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leqslant n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$$

   La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$ et finalement :

$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

   Les polynômes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

   $$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\} \quad P\left(a_i\right) = a_i^p$$

   Par l'unicité vue en première question, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

EXERCICE 88 algèbre

Énoncé exercice 88

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

Corrigé exercice 88

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
   On suppose que P annule u.
   Soit λ une valeur propre de u.
   Prouvons que $P(\lambda) = 0$.
   λ valeur propre de u donc : $\exists\, x \in E \setminus \{0\} \ /\ u(x) = \lambda x$.
   On prouve alors par récurrence que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k x$.
   Ainsi : $P(u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = P(\lambda)\, x$.
   Or $P(u) = 0$ donc $P(u)(x) = 0$ donc $P(\lambda)x = 0$.
   Or $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.
   (a) Posons $P = X^2 - 2X + 1$.
   Prouvons que P est annulateur de u c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
   Soit $M \in E$.
   $u^2(M) = u \circ u(M) = (M + \mathrm{tr}(M)A) + \mathrm{tr}\,(M + \mathrm{tr}(M)A)\, A$.
   C'est-à-dire, par linéarité de la trace, $u^2(M) = M + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A$.
   Or $\mathrm{tr}(A) = 0$ donc $u^2(M) = M + 2\mathrm{tr}(M)A$.
   Ainsi $u^2(M) - 2u(M) + \mathrm{Id}(M) = M + 2\mathrm{tr}(M)A - 2M - 2\mathrm{tr}(M)A + M = 0$.

   On a donc prouvé que $u^2 - 2u + \mathrm{Id} = 0$.
   C'est-à-dire P est annulateur de u.
   (b) Notons I_n la matrice unité de E.
   Première méthode :
   Notons $\mathrm{Spec}(u)$ le spectre de u.
   $P = (X-1)^2$ et P est annulateur de u.
   Donc d'après 1., $\mathrm{Spec}(u) \subset \{1\}$.
   De plus $A \neq 0$ et $u(A) = A$ donc $\mathrm{Spec}(u) = \{1\}$.
   Ainsi, si u était diagonalisable alors on aurait $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$.
   C'est-à-dire, on aurait $u = \mathrm{Id}$.
   Or $u(\mathrm{I_n}) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
   On obtient donc une contradiction.
   On en déduit que u n'est pas diagonalisable.

   Deuxième méthode :

Notons π_u le polynôme minimal de u.
$P = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de u donc $\pi_u | P$.
Si u était diagonalisable alors π_u serait scindé à racines simples.
On aurait donc $\pi_u = X - 1$.
Ce qui impliquerait que $u = \mathrm{Id}$ car P_m est également un polynôme annulateur de u.
Or $u(\mathrm{I_n}) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que u n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 89 algèbre

Énoncé exercice 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Corrigé exercice 89

1. On pose $Z = z^k - 1$.
   $Z = e^{\mathrm{i}\,\dfrac{k2\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}\,2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

   c'est-à-dire $Z = 2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\dfrac{k\pi}{n} + \dfrac{\pi}{2})}$

   Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < \frac{k\,\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right) > 0$.

   Donc le module de Z est $2\ \sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)$ et un argument de Z est $\dfrac{k\pi}{n} + \dfrac{\pi}{2}$.
2. On remarque que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right) = 0$.

   Donc d'après la question précédente, on a $S = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)$.

   S est donc la partie imaginaire de $T = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}$.

   Or, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2\dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1 - e^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}}} = \dfrac{4}{1 - e^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}}}$.

   Or $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}\right) = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

   On en déduit que $T = \dfrac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}}{-2\mathrm{i}\ \sin\dfrac{\pi}{2n}} = \dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}\ \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}$.

   En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ ($n \geqslant 2$), on en déduit que $S = \dfrac{2}{\tan\dfrac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 90 algèbre

Énoncé exercice 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Corrigé exercice 90

1. Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.

   Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.
   Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.
   Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.

   Enfin, $\dim\big(\mathbb{K}_2[X]\big) = \dim\big(\mathbb{K}^3\big) = 3$ donc Φ est bijective.

   Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.
2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.
   Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1,0,0)$ i.e. $\big(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)\big) = (1,0,0)$.
   Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X-a_2)(X-a_3)\,|L_1$.
   Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X-a_2)(X-a_3)$.
   La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \dfrac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$.
   Donc $L_1 = \dfrac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$.
   Un raisonnement analogue donne $L_2 = \dfrac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$ et $L_3 = \dfrac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$.
3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.
   Par construction, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.
   Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.
4. On pose $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.
   On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) = (1,3,1)$.
   Par bijectivité de Φ et d'après 3. , l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.
   On a $L_1 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_2 = \dfrac{X(X-2)}{-1}$ et $L_3 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.
   Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

EXERCICE 91 algèbre

Énoncé exercice 91

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Corrigé exercice 91

1. Déterminons le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{3} C_i}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1 \\ \lambda-1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

   Donc $\chi_A = (X-1)^3$.
   Donc A admet 1 comme unique valeur propre.
2. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible.
   Si A était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à la matrice identité.
   Puisque ce n'est pas le cas, A n'est pas diagonalisable.
3. Notons π_A le polynôme minimal de A.
   π_A divise χ_A et π_A est un polynôme annulateur de A.
   $A - \mathrm{I}_3 \neq 0$ et $(A-\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Donc $\pi_A = (X-1)^2$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$,
   $\exists\,!(Q,R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$, $X^n = (X-1)^2 Q + R \quad (1)$
   Or, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $R = aX + b$ donc $X^n = (X-1)^2 Q + aX + b$.
   Puisque 1 est racine double de $(X-1)^2$ on obtient : $1 = a + b$ et, après dérivation, $n = a$.
   Donc $R = nX + 1 - n. \quad (2)$
   $\pi_A = (X-1)^2$ étant un polynôme annulateur de A on a d'après (1) et (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = nA + (1-n)\mathrm{I}_3$$

EXERCICE 92 algèbre

Énoncé exercice 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\,,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.

Corrigé exercice 92

1. $\langle\,,\rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E.
   De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
   $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\,,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}\left(\left(A^T B\right)^T\right) = \mathrm{tr}(B^T A) = \langle B\,,A\rangle$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est symétrique.
   On en déduit que $\langle\,,\rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)

   Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.
   $\langle A\,,A\rangle = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum\limits_{i=1}^{n}(A^T A)_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(A^T)_{i,k}A_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$ donc $\langle A\,,A\rangle \geqslant 0$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est positive. (2)

   Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$ telle que $\langle A\,,A\rangle = 0$.
   Alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k,i}^2 = 0$. Or, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i}^2 \geqslant 0$.
   Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i} = 0$. Donc $A = 0$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est définie. (3)

   D'après (1),(2) et (3), $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   Remarque importante : Soit $(A,B) \in E^2$.
   On pose $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
   Alors $\langle A\,,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum\limits_{i=1}^{n}(A^T B)_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(A^T\right)_{i,k} B_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k,i}B_{k,i}$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.
   alors $M^T = M$ et $M^T = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.
   Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)

   Soit $M \in E$.
   Posons $S = \dfrac{M + M^T}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^T}{2}$.
   On a $M = S + A$.
   $S^T = \left(\dfrac{M + M^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T + (M^T)^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(M^T + M\right) = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.
   $A^T = \left(\dfrac{M - M^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T - (M^T)^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -A$, donc $A \in A_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. (2)

D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $\forall\, A \in A_n(\mathbb{R})$, $\langle S\,, A\rangle = 0$.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.
$\langle S\,, A\rangle = \mathrm{tr}(S^T A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(-A^T S) = -\mathrm{tr}(A^T S) = -\langle A\,, S\rangle = -\langle S\,, A\rangle$.
Donc $2\langle S\,, A\rangle = 0$ soit $\langle S\,, A\rangle = 0$.

On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$ (1)

De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^{\perp} = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^{\perp}$. (2)

D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

3. On introduit la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $E_{i,j} = (e_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec $e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
On a alors $F = \mathrm{Vect}\,(E_{1,1}, E_{2,2}, ..., E_{n,n})$.
Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.
Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,
$M \in F^{\perp} \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle M\,, E_{i,i}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ m_{i,i} = 0$.
Donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j} \text{ telles que } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ et } i \neq j\right)$.
En d'autres termes, $F^{\perp}$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

EXERCICE 93 algèbre

Énoncé exercice 93

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Corrigé exercice 93

1. On a $u^3 + u^2 + u = 0 \quad (*)$
   Soit $y \in \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}u$.
   Alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$.
   Donc, d'après (*), $0 = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = \underbrace{u^2(y)}_{=0} + \underbrace{u(y)}_{=0} + y = 0$.
   Donc $y = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Im}u = \{0\}$. (1)
   De plus, E étant de dimension finie, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Ker}u + \dim \mathrm{Im}u$. (2)

   Donc, d'après (1) et (2), $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$.
2. (a) Lemme des noyaux pour deux polynômes :
   Si A et B sont deux polynômes premiers entre eux, alors $\mathrm{Ker}(AB)(u) = \mathrm{Ker}A(u) \oplus \mathrm{Ker}B(u)$.
   (b) On pose $P = X^3 + X^2 + X$. P est un polynôme annulateur de u donc $\mathrm{Ker}P(u) = E$.
   $P = X(X^2 + X + 1)$. De plus, X et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.
   Donc, d'après le lemme des noyaux, $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

   On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}u = \dim \mathrm{Im}u$. (3)

   Prouvons que $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}u$.
   alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$.
   $(u^2 + u + \mathrm{Id})(y) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0$ d'après (*).
   Donc $y \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
   On a donc prouvé que $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$. (4)
   Donc, d'après (3) et (4), $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$ est un polynôme annulateur de u.
   Donc si on note $\mathrm{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u alors $\mathrm{sp}(u) \subset \{$racines réelles de $P\}$.
   Or $\{$racines réelles de $P\} = \{0\}$ donc $\mathrm{sp}(u) \subset \{0\}$. (5)
   Or u est non bijectif donc, comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, u est non injectif.
   Donc $\mathrm{Ker}u \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de u. (6)
   On en déduit, d'après (5) et (6), que $\mathrm{sp}(u) = \{0\}$.

EXERCICE 94 algèbre

Énoncé exercice 94

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 5 \ [6] \\ x \equiv 4 \ [8] \end{cases}$ n'a pas de solution x appartenant à $\mathbb{Z}$.
2. (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

   (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{Z}$.

   Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 \ [17] \\ x \equiv 5 \ [16] \\ x \equiv 4 \ [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).
   On exprimera les solutions en fonction de la solution particulière x_0.

Corrigé exercice 94

1. Par l'absurde on suppose que $x \in \mathbb{Z}$ est solution.
   Alors $x \equiv 5 \ [6]$ donne que x est impair puisque qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 6k + 5$.
   De même $x \equiv 4 \ [8]$ donne que x est pair. D'où l'absurdité.
2. (a) Théorème de Bézout :
   Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
   $a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1$.

   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.
   Soit $c \in \mathbb{Z}$.
   Prouvons que $ab|c \Longrightarrow a|c \text{ et } b|c$.
   Si $ab|c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ c = kab$.
   Alors, $c = (kb)a$ donc $a|c$ et $c = (ka)b$ donc $b|c$.

   Prouvons que $(a|c \text{ et } b|c) \Longrightarrow ab|c$.
   $a \wedge b = 1$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1$. (1)
   De plus $a|c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_1 a$. (2)
   De même, $b|c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_2 b$. (3)
   On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.
   Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b)au + (k_1 a)bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab|c$.

   On a donc prouvé que $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. (a) En observant le système (S), on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.

   (b) x_0 solution particulière de (S) donc $\begin{cases} x_0 \equiv 6 \ [17] \\ x_0 \equiv 5 \ [16] \\ x_0 \equiv 4 \ [15] \end{cases}$.

   On en déduit que x solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0 \ [17] \\ x - x_0 \equiv 0 \ [16] \\ x - x_0 \equiv 0 \ [15] \end{cases}$
   c'est-à-dire x solution de $(S) \iff (17|x - x_0 \text{ et } 16|x - x_0 \text{ et } 15|x - x_0)$.
   Or $17 \wedge 16 = 1$ donc d'après 2.(b), x solution de (S) $\iff (17 \times 16|x - x_0 \text{ et } 15|x - x_0)$.
   De même $(17 \times 16) \wedge 15 = 1$ donc d'après 2.(b), x solution de (S) $\iff 17 \times 16 \times 15|x - x_0$.

   Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 16 \times 15k, \ k \in \mathbb{Z}\} = \{-11 + 4080k, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

BANQUE PROBABILITÉS

EXERCICE 95 probabilités

Énoncé exercice 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément cinq boules dans l'urne.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Corrigé exercice 95

1. (a) L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois.
   Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes.
   Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\dfrac{4}{5}$).
   La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5, \dfrac{1}{5})$.

   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$ et : $\forall\, k \in [\![0,5]\!]$, $P(X = k) = \dbinom{5}{k}(\dfrac{1}{5})^k(\dfrac{4}{5})^{5-k}$.

   Donc, d'après le cours, $E(X) = 5 \times \dfrac{1}{5} = 1$ et $V(X) = 5 \times \dfrac{1}{5} \times \left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

   (b) D'après les hypothèses, on a $Y = 2X - 3(5 - X)$, c'est-à-dire $Y = 5X - 15$.
   On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0,5]\!]\}$.

   Et on a $\forall\, k \in [\![0,5]\!]$, $P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \dbinom{5}{k}(\dfrac{1}{5})^k(\dfrac{4}{5})^{5-k}$.

   $Y = 5X - 15$, donc $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 - 15 = -10$.

   De même, $Y = 5X - 15$, donc $V(Y) = 25V(X) = 25 \times \dfrac{4}{5} = 20$.

2. Dans cette question, le joueur tire simultanément 5 boules dans l'urne.
   (a) $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
   Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.
   L'univers Ω correspond à l'ensemble des tirages possibles dans A.
   Il est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A.
   Donc $\operatorname{card}\Omega = \dbinom{10}{5}$.

   Soit $k \in [\![0,2]\!]$.
   L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5 - k)$ boules noires dans l'urne.
   Notons A_k l'ensemble des parties à 5 éléments de A contenant k boules blanches et $(5-k)$ boules noires.
   Il y a $\dbinom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\dbinom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires.

Il y a noires.

C'est-à-dire, $\text{card}A_k = \dbinom{2}{k}\dbinom{8}{5-k}$.

Donc, comme tous les tirages sont équiprobables, $\forall\, k \in [\![0,2]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{\text{card}A_k}{\text{card}\Omega} = \dfrac{\dbinom{2}{k} \times \dbinom{8}{5-k}}{\dbinom{10}{5}}$.

(b) On a toujours $Y = 5X - 15$.
On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0,2]\!]\}$.
Et on a $\forall\, k \in [\![0,2]\!]$, $P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \dfrac{\dbinom{2}{k} \times \dbinom{8}{5-k}}{\dbinom{10}{5}}$.

EXERCICE 96 probabilités

Énoncé exercice 96

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in]-1, 1[$.
   Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Corrigé exercice 96

1. On considère la série entière $\sum p_n t^n$ et on note R son rayon de convergence.
   La série $\sum p_n$ converge car $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   Donc $\sum p_n t^n$ converge pour $t = 1$, donc $R \geqslant 1$.
   Notons D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   On a donc :$]-1, 1[\subset D_{G_X}$
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Prouvons que $\forall t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

   (a) **En utlisant le produit de Cauchy de deux séries entières** :
   Notons R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_1 = n)t^n$.
   Notons R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_2 = n)t^n$.
   Notons R le rayon de convergence de la série entière produit $\sum c_n t^n$ avec
   $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n - k)$.
   On a, d'après le cours, $R \geqslant \min(R_1, R_2)$ et :
   $\forall t \in]-R, R[$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n - k)\right)t^n$
   Or, on a vu dans la question 1. que $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 \geqslant 1$.
   Donc, $R \geqslant 1$.
   Donc, par produit de Cauchy pour les séries entières,
   $\forall t \in]-1, 1[$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n - k)\right)t^n$. (*)
   De plus, pour tout entier naturel n,

$(S=n)=(X_1+X_2=n)=\bigcup_{k=0}^{n}((X_1=k)\cap(X_2=n-k))$ (union d'événements deux à deux incompatibles).

Donc : $P(S=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X_2=n-k)$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $\forall t\in\,]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(S=n)t^n$.

C'est-à-dire, $\forall t\in\,]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)=G_S(t)$.

(b) **En utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice** :
Soit $t\in\,]-1,1[$.
D'après 1., t^{X_1} et t^{X_2} admettent une espérance.
De plus, $G_{X_1}(t)=E[t^{X_1}]$ et $G_{X_2}(t)=E[t^{X_2}]$.
X_1 et X_2 sont indépendantes donc t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes.
Donc $t^{X_1}t^{X_2}=t^S$ admet une espérance et $E[t^S]=E[t^{X_1}]E[t^{X_2}]$.
C'est-à-dire, $G_S(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

3. Soit S_n variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
On note X_i la variable aléatoire égale au numéro tiré au $i^{\text{ème}}$ tirage.
$X_i(\Omega)=\{0,1,2\}$.
De plus, $P(X_i=0)=\frac{1}{4}$, $P(X_i=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $P(X_i=2)=\frac{1}{4}$.
Donc, $\forall t\in\,]-1,1[$, $G_{X_i}(t)=E[t^{X_i}]=t^0P(X_i=0)+t^1P(X_i=1)+t^2P(X_i=2)$.

Donc, $\forall t\in\,]-1,1[$, $G_{X_i}(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{4}(t+1)^2$.

On a : $S_n=X_1+X_2+...+X_n$.
De plus, les variables aléatoires $X_1,X_2,...,X_n$ sont indépendantes.
D'après 2., on en déduit que : $\forall t\in\,]-1,1[$, $G_{S_n}(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)....G_{X_n}(t)$.
C'est-à-dire, $\forall t\in\,]-1,1[$, $G_{S_n}(t)=\frac{1}{4^n}(1+t)^{2n}$.
Ou encore, $\forall t\in\,]-1,1[$, $G_{S_n}(t)=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\frac{1}{4^n}t^k$.

Or, $\forall t\in\,]-1,1[$, $G_{S_n}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(S_n=k)t^k$.
Donc, par unicité du développement en série entière :
$S(\Omega)=[\![0,2n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,2n]\!]$, $P(S_n=k)=\binom{2n}{k}\frac{1}{4^n}=\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$

Donc, S_n suit une loi binomiale de paramètre $(2n,\frac{1}{2})$.

EXERCICE 97 probabilités

Énoncé exercice 97

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y)=(j,k)\right)=\dfrac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Corrigé exercice 97

On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega)=\mathbb{N}$.
   Soit $k\in\mathbb{N}$, tous les termes étant positifs, on peut écrire dans $[0,+\infty]$.
   $P(Y=k)=\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}P\left((X,Y)=(j,k)\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}$.
   Toujours dans $[0,+\infty]$
   $$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\,k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\,k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}<\infty\quad(*).\qquad(\star)$$
   et de même
   $$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\,k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\,k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}\quad(**).\qquad(\star\star)$$
   Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que :
   $P(Y=k)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}+\dfrac{k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}=\dfrac{(\dfrac{1}{2}+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}$.
   Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc :
   $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall j\in\mathbb{N}$, $P(X=j)=\dfrac{(\dfrac{1}{2}+j)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}$.
   Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car :
   $P((X,Y)=(0,0))=0$ et $P(X=0)P(Y=0)\neq 0$.
2. La variable aléatoire 2^{X+Y} est positive et possède donc une espérance dans $[0,+\infty]$ qu'on peut calculer directement avec la formule de transfert :
   $$E(2^{X+Y})=\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}\frac{j+k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}\frac{j}{\mathrm{e}\,j!\,k!}+\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}\frac{k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=2\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}\frac{j}{\mathrm{e}\,j!\,k!}$$
   pour raisons de symétrie des rôles de j et k.
   On obtient, par le théorème de Fubini, $E(2^{X+Y})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{j}{j!}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}\right)=2\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(j-1)!}=2\mathrm{e}<\infty$..
   On a ainsi démontré que $2^{X+Y}\in L^1$ et obtenu son espérance.

EXERCICE 98 probabilités

Énoncé exercice 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k|X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Corrigé exercice 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1 - p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binômiale de paramètres (n, p).
   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$.
   Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels. Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question 1., sauf pour le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n - i$, alors on se retrouve dans le schéma d'une loi binomiale de paramètre $(n - i, p)$.

   Donc $P(Y = k|X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in [\![0, n-i]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   (b) $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(Y = k - i|X = i)P(X = i)$.

   Soit $k \in [\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$.

   Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   Donc $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.
   Donc d'après le binôme de Newton,
   $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}$.
   On vérifie que $1 - p(2 - p) = (1 - p)^2$ et donc on peut conclure que :
   Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2 - p))$.

   Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :
   $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors :
$E(Z) = np(2-p)$ et $V(Z) = np(2-p)\,(1-p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2$.

EXERCICE 99 probabilités

Énoncé exercice 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Corrigé exercice 99

1. Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour toute variable aléatoire X telle que $X \in L^2$, on a :
   $P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n}V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
   Les variables Y_i suivent la même loi, sont indépendantes et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i \in L^2$.
   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1 - 0,4) = 0,24$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   Alors $T_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.
   Or $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = P\left(0,35 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$
   $= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   On a donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) \geqslant 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.
   La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

EXERCICE 100 probabilités

Énoncé exercice 100

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Corrigé exercice 100

1. On obtient $R(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)}$.
2. $(P(X = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ doit être une distribution de probabilités discrète sur $\mathbb{N}$ donc être positive, ce qui impose $\lambda \geqslant 0$, et vérifier $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)} = 1$. Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)}$$ après télescopage, d'où :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right) = \frac{1}{4}$$ en faisant tendre N vers l'infini. Il vient $\lambda = 4$.
3. X étant positive admet une espérance dans $[0, +\infty]$ que l'on peut calculer directement.
$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 2 < \infty$$
car, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = 4 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 4 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} \right) = 2 - \frac{4}{n+2}$.
d'où $X \in L^1$ et $E(X) = 2$.
4. De la même façon, $E(X^2)$ existe dans $[0, +\infty]$ et
$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{(n+1)(n+2)}.$$
Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).
Donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^2 P(X = n)$ diverge.
Donc $E(X^2) = +\infty$, autrement dit $X \notin L^2$.

EXERCICE 101 probabilités

Énoncé exercice 101

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Corrigé exercice 101

1. (a) (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
   $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n)$.
   donc $a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
   (b) De même, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

2. (a) A est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable.
   (b) $A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}\left(A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3\right) = 1$.
   Donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A) = 2$.
   L'expression de $A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ donne immédiatement que $E_{-\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   (c) Puisque $\mathrm{tr}\,(A) = 0$, on en déduit que 1 est une valeur propre de A de multiplicité 1.
   A étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires sur $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux deux à deux.
   On en déduit que $\mathbb{R}^3 = E_{-\frac{1}{2}}(A) \overset{\perp}{\oplus} E_1(A)$, donc que $E_1(A) = \left(E_{-\frac{1}{2}}(A)\right)^{\perp}$.

Donc $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

En posant $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1/2 & 0\\0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$, on a alors $D = P^{-1}AP$.

3. D'après la question 1., $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$

   Et donc on prouve par récurrence que :

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$

   Or $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Donc $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$

   Or, d'après l'énoncé, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ donc :

   $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0\\0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

EXERCICE 102 probabilités

Énoncé exercice 102

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Corrigé exercice 102

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.
   $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$.
   Alors on a $P(X_i \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$.
   Donc $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leqslant n) = q^n$.
2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \cdots \cap (X_N > n))$
   Donc $P(Y > n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{N} P(X_i > n)$ car les variables $X_1, \cdots, X_N$ sont indépendantes.
   Donc $P(Y > n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{N} q^n = q^{nN}$.
   Or $P(Y \leqslant n) = 1 - P(Y > n)$
   donc $P(Y \leqslant n) = 1 - q^{nN}$.

   Calcul de $P(Y = n)$:
   Premier cas : si $n \geqslant 2$.
   $P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n - 1)$.
   Donc $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
   Deuxième cas : si $n = 1$.
   $P(Y = n) = P(Y = 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - q^N$.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.

   (b) D'après 2.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
   C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \left(1 - (1 - q^N)\right)^{n-1}(1 - q^N)$.
   On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^N$.
   Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y) = \dfrac{1}{1 - q^N}$.

EXERCICE 103 probabilités

Énoncé exercice 103

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
(b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

Corrigé exercice 103

1. (a) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$(X_1 + X_2 = n) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} ((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k))$ (union d'évènements deux à deux disjoints).
Donc :

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Ainsi $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Remarque : cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.
(b) $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ donc, d'après le cours, $E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $V(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} P\left((X = k) \cap (Y = m)\right) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X = k)P(Y = m)$.
Or, par hypothèse,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ P_{(Y=m)}(X = k) = \begin{cases} \dbinom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k} & \text{si } k \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{\lambda^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m}}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ainsi $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda p)$.

EXERCICE 104 probabilités

Énoncé exercice 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 104

1. $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.
2. (a) Pour que l'événement $(X = 2)$ se réalise, on a $\binom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des n boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.
   De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.
   Donc $P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

   (b) Déterminons $P(X = 1)$.
   Pour que l'événement $(X = 1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide.
   Le compartiment restant vide étant choisi, on note A l'événement : «les n boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment a et compartiment b) sans laisser l'un d'eux vide».

   Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   On note A_k l'événement : « k boules se placent dans le compartiment a et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment b».
   On a alors $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$.
   On a $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(A_k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   Donc $P(X = 1) = \binom{3}{1}P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right) = 3\sum\limits_{k=1}^{n-1} P(A_k)$ car $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.
   Donc
   $P(X = 1) = 3\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 2\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)$.
   Donc $P(X = 1) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)$.

   Enfin, $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$ donc $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)$.
   Donc $P(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 1)$.

Autre méthode :
Une épreuve peut être assimilée à une application de $[\![1,n]\!]$ (ensemble des numéros des boules) dans $[\![1,3]\!]$ (ensemble des numéros des cases).
Notons Ω l'ensemble de ces applications.
On a donc : $\operatorname{card}\Omega = 3^n$.
Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur Ω.

(a) L'événement $(X=2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $[\![1,3]\!]$, c'est-à-dire aux applications constantes.
Donc $P(X=2) = \dfrac{3}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X=1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.
On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $[\![1,3]\!]$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ vers les deux éléments restants de $[\![1,3]\!]$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.
On obtient donc $2^n - 2$ applications.
D'où $P(X=1) = \dfrac{3\times(2^n-2)}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}\,(2^n-2)$.

Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X=0) = 1 - P(X=2) - P(X=1)$ donc
$P(X=0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

3. (a) $E(X) = 0P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2) + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

   Donc $E(X) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   (b) D'après 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.
   Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

EXERCICE 105 probabilités

Énoncé exercice 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 105

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
   Soit B un événement de probabilité non nulle et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   Alors, $\forall\, i_0 \in I$, $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$.

   Preuve : $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i0}}(B)}{P(B)}$. (1)

   Or $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements donc $P(B) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i \cap B)$.

   Donc $P(B) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$. (2).

   (1) et (2) donnent le résultat souhaité.
2. (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
   Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
   Notons A l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \dfrac{3}{4}$.

   Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

   $$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
   $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

   On pose $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

   On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.

   Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P\left(\overline{T}\right)}$$

Donc $p_n = \dfrac{\dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n \times \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.

Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

EXERCICE 106 probabilités

Énoncé exercice 106

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X=k)=P(Y=k)=pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q=1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U=\sup(X,Y)$ et $V=\inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega)=\mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V=n)=pq^{2n}(1+q)$.
3. Prouver que $W=V+1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Corrigé exercice 106

1. $(U,V)(\Omega)=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } m \geqslant n\right\}$. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.
   Premier cas : si m=n
   $P((U=m)\cap(V=n))=P((X=n)\cap(Y=n))=P(X=n)P(Y=n)$ car X et Y sont indépendantes.
   Donc $P((U=m)\cap(V=n))=p^2q^{2n}$.
   Deuxième cas : si m>n
   $P((U=m)\cap(V=n))=P([(X=m)\cap(Y=n)]\cup[(X=n)\cap(Y=m)])$
   Les événements $((X=m)\cap(Y=n))$ et $((X=n)\cap(Y=m))$ sont incompatibles donc :
   $P((U=m)\cap(V=n))=P\left((X=m)\cap(Y=n)\right)+P\left((X=n)\cap(Y=m)\right)$.
   Or les variables X et Y suivent la même loi et sont indépendantes donc :
   $P((U=m)\cap(V=n))=2P(X=m)P(Y=n)=2p^2q^{n+m}$.
   Troisième cas : si m<n
   $P((U=m)\cap(V=n))=0$.

   Bilan : $P((U=m)\cap(V=n))=\begin{cases} p^2q^{2n} & \text{si } m=n\\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m>n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
2. $U(\Omega)=\mathbb{N}$ et $V(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $m\in\mathbb{N}$.
   $P(U=m)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P((U=m)\cap(V=n))$. (loi marginale de (U,V))
   Donc d'après 1., $P(U=m)=\displaystyle\sum_{n=0}^{m}P((U=m)\cap(V=n)) \quad (*)$
   Premier cas : $m\geqslant 1$
   D'après $(*)$, $P(U=m)=P((U=m)\cap(V=m))+\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}P((U=m)\cap(V=n))$.
   Donc
   $P(U=m)=p^2q^{2m}+\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}2p^2q^{n+m}=p^2q^{2m}+2p^2q^m\sum_{n=0}^{m-1}q^n=p^2q^{2m}+2p^2q^m\frac{1-q^m}{1-q}=p^2q^{2m}+2pq^m(1-q^m)$
   Donc $P(U=m)=pq^m(pq^m+2-2q^m)$.

   Deuxième cas : $m=0$
   D'après $(*)$ et 1., $P(U=0)=P((U=0)\cap(V=0))=p^2$.

   Bilan : $\forall\, m\in\mathbb{N}$, $P(U=m)=pq^m(pq^m+2-2q^m)$.
3. $W(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   $P(W=n)=P(V=n-1)=pq^{2(n-1)}(1+q)=(1-q)q^{2(n-1)}(1+q)$.
   Donc $P(W=n)=(1-q^2)\left(q^2\right)^{n-1}$.
   Donc W suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
   Donc, d'après le cours, $E(W)=\dfrac{1}{1-q^2}$. Donc $E(V)=E(W-1)=E(W)-1=\dfrac{q^2}{1-q^2}$.

4. $P((U=0)\cap(V=1))=0$ et $P(U=0)P(V=1)=p^3q^2(1+q)\neq 0$. Donc U et V ne sont pas indépendantes.

EXERCICE 107 probabilités

Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Corrigé exercice 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
   Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
   (U_1, U_2) est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
   On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
   Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$.
   On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.

EXERCICE 108 probabilités

Énoncé exercice 108

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Corrigé exercice 108

1. $\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$.
   $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $i \in \mathbb{N}$.
   $\sum\limits_{j\geqslant 0} \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}} \sum\limits_{j\geqslant 0} \dfrac{1}{j!}$ converge et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   Or $P(X=i) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$ donc $P(X=i) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}} \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{j!} = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   Conclusion : $\forall\, i \in \mathbb{N},\ P(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.

   $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $j \in \mathbb{N}$.
   $\sum\limits_{i\geqslant 0} \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}j!} \sum\limits_{i\geqslant 0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^i$ converge (série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$) et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}j!} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}j!}$.
   Or $P(Y=j) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$.
   Donc $P(Y=j) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}j!} \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^i = \dfrac{1}{2\mathrm{e}j!} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}j!}$.
   Conclusion : $\forall\, j \in \mathbb{N},\ P(Y=j) = \dfrac{1}{\mathrm{e}j!}$.
2. (a) On pose $Z = X+1$.
   $Z(\Omega) = N^*$.
   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z=n) = P(X=n-1) = \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.
   Donc, d'après le cours, $E(Z) = \dfrac{1}{p} = 2$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = 2$.
   Donc $E(X) = E(Z-1) = E(Z)-1 = 2-1 = 1$ et $V(X) = V(Z-1) = V(Z) = 2$.
   C'est-à-dire $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$.
   (b) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
   Donc, d'après le cours, $E(Y) = V(Y) = \lambda = 1$.
3. On a : $\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = P(X=i)P(Y=j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.

4. $(X = Y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((X = k) \cap (Y = k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{k+1}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

Donc $P(X = Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.

EXERCICE 109 probabilités

Énoncé exercice 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Corrigé exercice 109

1. $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
   $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
   $\forall\, i \in [\![1, 2]\!]$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
   On pose $E = \{B_1, B_2, ..., B_n, N_1, N_2\}$.
   Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega) = (n + 2)!$.

   $(X = 1)$ correspond aux tirages des $(n + 2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
   On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n + 1)!$ possibilités pour les tirages restants.
   Donc $P(X = 1) = \dfrac{n \times (n + 1)!}{(n + 2)!} = \dfrac{n}{n + 2}$.

   $(X = 2)$ correspond aux tirages des $(n + 2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.
   On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.
   Donc $P(X = 2) = \dfrac{2 \times n \times (n)!}{(n + 2)!} = \dfrac{2n}{(n + 1)(n + 2)}$.

   $(X = 3)$ correspond aux tirages des $(n + 2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
   On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
   Donc $P(X = 3) = \dfrac{2 \times 1 \times (n)!}{(n + 2)!} = \dfrac{2}{(n + 1)(n + 2)}$.

   Autre méthode :
   Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.
   $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

   $(X = 1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
   Donc $P(X = 1) = \dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \dfrac{n}{n + 2}$.

   $(X = 2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".
   D'où $P(X = 2) = \dfrac{2}{n + 2} \times \dfrac{n}{n + 1} = \dfrac{2n}{(n + 2)(n + 1)}$, les tirages se faisant sans remise.

   $(X = 3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
   D'où $P(X = 3) = \dfrac{2}{n + 2} \times \dfrac{1}{n + 1} \times \dfrac{n}{n} = \dfrac{2}{(n + 2)(n + 1)}$, les tirages se faisant sans remise.
2. $Y(\Omega) = [\![1, n + 1]\!]$.
   Soit $k \in [\![1, n + 1]\!]$.

L'événement $(Y = k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1.
On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

Donc $P(Y = k) = \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \dfrac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$

Donc $P(Y = k) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode :
$Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k".

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.
On a : $(Y = k) = A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$.

Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$P(Y = k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1\cap A_2\cap...\cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1\cap A_2\cap...\cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.
$P(Y = k) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n-1}{(n+2)-1} \times \dfrac{n-2}{(n+2)-2} \times ... \times \dfrac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)} \times \dfrac{2}{(n+2)-(k-1)}$

$P(Y = k) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n-1}{n+1} \times \dfrac{n-2}{n} \times ... \times \dfrac{n-k+2}{n-k+4} \times \dfrac{2}{n-k+3}$.

$P(Y = k) = 2\,\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times \dfrac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$.
$P(Y = k) = \dfrac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

EXERCICE 110 probabilités

Énoncé exercice 110

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.
   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.
   Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

Corrigé exercice 110

1. (a) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in [-1,1]$, $|t^n P(X=n)| \leqslant P(X=n)$ et $\sum P(X=n)$ converge ($\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$).
   Donc $\forall\, t \in [-1,1]$, $\sum t^n P(X=n)$ converge absolument.
   On en déduit $R_X \geqslant 1$ et aussi $[-1,1] \subset D_{G_X}$. Au surplus, pour tout t dans $[-1,1]$, le théorème du transfert assure que la variable aléatoire t^X admet une espérance et $E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n) = G_X(t)$.
   G_X est la fonction génératrice de X.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
   G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R_X \geqslant 1$.
   Donc, d'après le cours, G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[\subset]-R_X, R_X[$.
   De plus, $\forall\, t \in]-1,1[$, $G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} P(X=n)$.
   En particulier, $G_X^{(k)}(0) = k! P(X=k)$ et donc $P(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum t^n P(X=n) = \sum t^n \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et donc $D_{G_X} = \mathbb{R}$.
   De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.
   (b) On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   $D_{G_X} = D_{G_Y} = \mathbb{R}$ et, si on pose $Z = X+Y$, alors $[-1,1] \subset D_{G_Z}$.
   Alors, $\forall\, t \in [-1,1]$, $G_Z(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y)$ car X et Y sont indépendantes et donc, d'après le cours, t^X et t^Y sont indépendantes.
   Donc, d'après 2.(a), $G_Z(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)} \mathrm{e}^{\lambda_2(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$.
   On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
   Donc, d'après 1.(b), comme Z a la même fonction génératrice qu'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$, alors $Z = X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

EXERCICE 111 probabilités

Énoncé exercice 111

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \left]-1,1\right[$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in \left]0,1\right[$.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k) \cap (Y=n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Corrigé exercice 111

1. On remarque que $\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=k) \cap (Y=n)) \geqslant 0$.
   Rappelons la convention du programme : $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
   Par positivité de tous les termes, on peut écrire directement dans $[0,+\infty]$, avec le théorème de Fubini :
   $$\sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^2} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$
   en reconnaissant successivement la formule du binôme de Newton et la somme d'une série géométrique.

   Les quantités données définissent bien une distribution de probabilités discrète sur $\mathbb{N}^2$, donc une loi de probabilité.
2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $P(Y=n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P((X=k) \cap (Y=n))$ (loi marginale)
   Donc, d'après les calculs précédents, $P(Y=n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p(1-p)^n$.
   C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y=n) = p(1-p)^n$.
   (b) Posons $Z = 1+Y$.
   $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z=n) = P(Y=n-1) = p(1-p)^{n-1}$.
   Donc Z suit une loi géométrique de paramètre p.
   (c) D'après la question précédente, $E(Z) = \dfrac{1}{p}$.
   Or $Y = Z-1$ donc $E(Y) = E(Z) - 1$ et donc $E(Y) = \dfrac{1-p}{p}$.
3. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(X=k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P((X=k) \cap (Y=n))$ (loi marginale)
   Donc $P(X=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p\left(\dfrac{1}{2}\right)^k (1-p)^k \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}(1-p)\right)^{n-k}$.

Donc, d'après les résultats admis dans l'exercice, $P(X=k)=p\left(\dfrac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2}(1-p)\right)^{k+1}}$

C'est-à-dire $P(X=k)=p\left(\dfrac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\dfrac{2^{k+1}}{(1+p)^{k+1}}$.

Donc, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=\dfrac{2p}{1+p}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k$.

EXERCICE 112 probabilités

Énoncé exercice 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Corrigé exercice 112

1. On note $F = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
   Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On pose $F_p = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B \text{ et } \operatorname{card} B = p\right\}$.
   Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\operatorname{card} \mathcal{P}(B) = 2^p$.
   De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.
   On en déduit que : $\forall\, p \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p} 2^p$.

   Or $F = \bigcup\limits_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, ..., F_n$ deux à deux disjoints.

   Donc $a = \operatorname{card} F = \sum\limits_{p=0}^{n} \operatorname{card} F_p = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.

   Conclusion : $a = 3^n$.

   Autre méthode :
   Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
   Notons encore $F = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
   À tout couple (A, B) de F, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :

   $$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 2 & \text{si} \quad x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si} \quad x \notin B \end{cases} \end{array}$$

   On note $\mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.

   Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\}) \\ (A, B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.
   Le résultat en découle.
2. $\left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \emptyset\right\} = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\}$.

   $$\begin{aligned} \text{Or } \operatorname{card} \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} &= \operatorname{card} \left\{(A, \overline{B}) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} \\ &= \operatorname{card} \left\{(A, C) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset C\right\} \\ &= a. \end{aligned}$$

   Donc $b = a$.
3. Compter tous les triplets (A, B, C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A \cup B \cup C = E$ revient à compter tous les couples (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A \cup B}$.

   En d'autres termes, $c = \operatorname{card} \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \emptyset\right\} = b = 3^n$.