



## 1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Le problème 1 proposait l'étude d'une matrice de covariance et mettait en jeu des connaissances en probabilités, en algèbre linéaire et sur les espaces vectoriels. Le deuxième problème traitait d'une équation différentielle aux coefficients non constants et faisait référence aux fonctions trigonométriques réciproques, aux séries entières et au travail sur les équivalents. Ces deux exercices largement indépendants ont reçu un accueil très différent. La plupart des réponses aux questions étaient données dans l'énoncé pour mettre l'accent sur l'aspect méthode et la connaissance des théorèmes justifiant les démarches. Ce fut un écueil pour de nombreux candidats qui se sont contentés de paraphraser les questions voire dans certains cas de forcer les calculs en oubliant la lecture scrupuleuse des correcteurs.

Le premier problème a séparé les candidats de manière assez tranchée entre ceux connaissant une loi de Bernoulli et sachant manier le vocabulaire lié aux probabilités et ceux ne répondant qu'à un nombre restreint de questions. L'exercice proposait également une gestion de sommes infinies. Aborder une somme infinie pose la question de la convergence (questions 2 - 5 - 7 - 10 - 11 - 12), et peu de candidats ont fait cas de la légalité de leur démarche. Il s'agissait du premier problème sur les probabilités depuis une dizaine d'années sur le concours, mais conforme au programme des deux années et sans difficulté particulière. Le second problème – s'inscrivant dans une démarche plus habituelle avec une fonction réciproque, une série entière et une équation différentielle – fut abordé par une plus grande partie des candidats. Très peu de copies n'ont inscrit aucun résultat juste ou faux le concernant, contrairement au premier problème que certains candidats n'ont pas entamé, et ce malgré la partie traitant de l'algèbre linéaire où la matrice était fournie. Les correcteurs rappellent que les probabilités forment une partie du programme assez conséquente, et peuvent être demandées au candidat dans le cadre du programme officiel des deux années de préparation.

De nombreux candidats ne portent pas un intérêt assez grand aux questions et à leur enchaînement. Ainsi il est possible de lire un récit plus ou moins rigoureux de résolution d'équation différentielle du premier ou second ordre sans se soucier des coefficients, ici non constants. Ce penchant à l'automatisme sans une compréhension de la question a pénalisé de nombreux candidats, aussi bien en les égarant qu'en leur faisant perdre du temps.

Il a été dénombré un nombre non négligeable de copies avec très peu de résultats inscrits ou même entamés. Il est regrettable qu'une durée de 4 heures ne permette à certains que de présenter 1 à 4 pages de résultats. Une méconnaissance des probabilités a été notée. Proposer une piste de travail est toujours plus bénéfique qu'une question non traitée, écrire une définition connue ou propriété pouvant être utilisée peut être une amorce à un travail fécond. Cette session a permis de départager de manière claire les étudiants connaissant des résultats de ceux se contentant de citer au hasard des bribes sans prendre connaissance du contexte ou de l'adéquation aux questions.

## 2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

### Problème 1

Q1 - Dès la question 1, il a été noté une méconnaissance des notions les plus élémentaires en probabilité. Outre la confusion entre loi de Bernoulli et loi binomiale, se sont vues ajouter des erreurs aberrantes pour un étudiant ayant suivi deux ans de mathématiques où les probabilités sont présentes chaque année. On peut citer, par exemple, des valeurs de probabilités plus grandes que 1 ou  $1/p$  dans bon nombre de copies sans préciser l'intervalle d'existence de  $p$ , ou encore des phrases évoquant un tirage sans remise et n'ayant aucun rapport avec la question. L'ensemble image de la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli est très souvent absent alors que des formules d'espérance et de variance parfois justes sont présentes mais non demandées par l'énoncé. Cette question a révélé une réponse de type catalogue sans compréhension réelle de la différence entre probabilité, espérance ou variance.

Q2 - Le traitement de cette question a été très inégal et s'est inscrit dans le traitement subi par la question précédente. Le théorème de transfert n'a pas été suffisamment cité. Il s'agit ensuite de l'appliquer correctement à la loi de Bernoulli.

Q3 - Si pour beaucoup, cette question n'a posé aucune difficulté, il reste dans de trop nombreuses copies une confusion entre les termes indépendants et incompatibles. On voit même parfois que X et Y doivent « être disjoints », « être égaux » ou bien même « suivre la même loi ». Par ailleurs, X et Y ne sont pas des événements.

Q4 - Question bien réussie.

Q5 - Une confusion règne entre formule des probabilités totales et formule des probabilités composées. Malheureusement, beaucoup raisonnent comme si les variables étaient indépendantes, influencés sûrement par la question 3. L'écriture sous forme d'intersection d'événements a également posé des difficultés dans la maîtrise du formalisme. Une coquille dans l'énoncé sans impact sur le contenu de la question.

Q6 - La question 6 demandait de démontrer une inégalité usuelle, à l'aide par exemple d'une identité remarquable. Certains sont bien partis mais le passage aux valeurs absolues a posé problème. Sur d'autres copies, il a été possible de lire le terme d'inégalité triangulaire, ce qui suffisait à obtenir une évaluation correcte. Cependant, proposer l'inégalité de Cauchy, de Cauchy-Schwarz, celle d'Al-Kashi ou Bienaymé-Tchebichev peut laisser dubitatif le correcteur sur la maîtrise des connaissances des candidats. Nous pouvons aussi citer des essais infructueux de démonstration à l'aide de dérivation, de développements limités, de coordonnées polaires, de nombres complexes voire de récurrence, pouvant être classés au rang des perles de cette session. Connaître le nom d'une propriété est un bon début, mais savoir le contexte de son utilisation est essentiel pour élaborer une démarche.

Q7 - Question dans l'ensemble réussie, même si le lien avec la question précédente n'a pas toujours été établi.

Q8 - Question, pourtant sans difficulté, trop rarement traitée. Un sous-espace vectoriel doit contenir au moins un élément, cette condition a souvent été omise. Certains se sont contentés d'affirmer que l'espérance est linéaire, ce qui ne répond pas à la question.

Q9 - La loi certaine a été reconnue dans de nombreuses copies et correctement écrite dans la plupart des cas. Il est à déplorer des écritures  $P(Z) = 1$  où la valeur de la variable aléatoire Z n'est pas donnée.

Q10 - Les candidats ayant une réponse correcte à la question 9 ont également réussi cette question.

Q11 - L'utilisation des résultats précédents n'a posé que très peu de difficulté. Les correcteurs attendent cependant des références claires aux questions précédentes.

Q12 - La question n'était pas essentiellement calculatoire et peu de candidats ont précisé la validité du calcul et l'utilisation de la linéarité de l'espérance. Beaucoup se sont contentés d'une résolution en calcul formel à leur détriment. Certains, pour retrouver le résultat demandé, affirment que  $XE(Y) = YE(X) = 0$ .

Q13 - L'utilisation des résultats précédents n'a posé que très peu de difficulté.

Q14 - L'écriture sous forme d'union ou d'intersection d'événements a été difficile pour un nombre important de candidats.

Q15 - Question soit bien écrite soit non traitée. La compréhension du vocabulaire a posé de grandes difficultés. Certains montrent bien que S suit une loi certaine égale à 2, mais trouvent une variance non nulle. On rappelle que pour une loi certaine, il n'est pas nécessaire d'effectuer de calcul pour trouver la variance.

Q16 - Le calcul de l'espérance du produit a été très mal abordé, le calcul d'une espérance a posé de graves soucis de compréhension et de notation. La formule de la variance dans le cas d'une loi de Bernoulli est bien maîtrisée.

Q17 - Question traitée avec succès par de nombreux candidats.

Q18 - Concernant cette question portant sur la vérification qu'un vecteur donné est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 0, de nombreuses erreurs aussi bien de stratégie que de compréhension, même des termes utilisés, ont été révélées. Ainsi, le sujet fournissait à la fois le vecteur et la valeur à tester, nul calcul nécessitant le polynôme caractéristique ou une résolution de système n'était nécessaire. Cet automatisme de calculer "bille en tête" pour certains candidats leur a fait perdre du temps et dans le pire des cas les a égarés dans des lignes fastidieuses. Il est bon de rappeler que la symétrie d'une matrice n'implique en aucun cas l'existence d'une valeur propre nulle ou d'une valeur particulière. En outre  $Ax = 0$  n'implique pas  $\text{Ker}(A = \text{Vect}(x))$  comme les correcteurs ont pu le lire.

Q19 – Cette question a été l'une des moins bien abordées dans cette session. Une confusion entre l'ordre de la matrice (à savoir sa dimension) et son rang a été plus que marquée sur les copies ayant proposé une réponse. Le théorème du rang n'a été utilisé que dans une infime minorité des copies. La méthode du pivot de Gauss pour obtenir le rang a été globalement bien réussie, mais il est à noter que la rédaction et l'ordre sont primordiaux dans une telle démarche. Enfin, il est attendu de savoir faire le lien avec la question précédente : trop souvent, le rang proposé est 3 alors que la question précédente permettait de voir que le noyau était non nul.

Q20 - Cette question a été très peu abordée et malmenée. Nombreux sont les candidats qui n'ont pas exprimé chaque coefficient en fonction de  $p$  uniquement (en gardant  $p_1$ ), faisant ainsi fi de la propriété  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . La formulation du problème en termes d'équations a également été âpre. Il est bon de rappeler que les valeurs de la diagonale d'une matrice symétrique ne sont (en général) pas les valeurs propres.

Q21 - Cette question a mis en exergue une incapacité pour certains candidats à utiliser une donnée de l'énoncé, ainsi sur d'assez nombreuses copies les correcteurs ont pu lire des matrices bien différentes de celle pourtant donnée dans l'énoncé. L'utilisation des résultats précédents et donnés à chaque question n'a pas été systématique et a donné lieu à des calculs déjà réalisés précédemment. La formule de la trace et son utilisation pour déterminer une dernière valeur propre sont connues et maîtrisées.

Q22 - Le théorème spectral, dont on notera l'absence de « e » pour l'adjectif étant donné que théorème est un nom masculin, a été très majoritairement bien utilisé. Il est à regretter que certains oublient la nécessité des coefficients réels et se contentent uniquement de la symétrie, rendant ainsi impossible l'utilisation du théorème spectral. Il est à noter que les copies indiquant un recours à l'orthogonalité ou répétant 3 fois dans la même phrase le terme diagonalisable sans aboutir à une phrase ni mathématiquement ni grammaticalement correcte laissent le lecteur pantois. Se relire est un conseil judicieux pour tout candidat se préparant à un concours.

Q23 - Question peu traitée. L'argument de la variance positive est apparu sur quelques copies. Les propriétés sur la variance sont mal connues : cette dernière en particulier n'est pas linéaire.

Q24 - Le calcul matriciel a été réalisé parfois, peu de candidats sont parvenus à répondre à cette question.

## **Problème 2**

Le problème numéro 2, centré sur l'analyse, a été de manière générale plus abordé.

Q25 - La question 25 demandait un ensemble de définition, un ensemble de dérivation et un calcul de dérivée. Si le dernier point a été très majoritairement bien mené, les justifications sur les ensembles ont été souvent hasardeuses, le parent pauvre étant sans nul doute l'ensemble de dérivation. Rappelons qu'effectuer un calcul de limite aux bornes d'un intervalle pour une fonction donnée ne prouve pas la continuité de la fonction sur l'intervalle donné et encore moins la dérivabilité sur cet intervalle. Une confusion entre arcsin et arctan a même été trouvée dans certaines copies. Il n'est pas inutile de rappeler que la continuité n'implique pas la dérivabilité et il est toujours pénible de lire «  $f(x)$  est continue ... ».

Q26 - La question 26 proposait de tester une fonction constante comme solution d'une équation différentielle. Rappeler que la fonction à tester est le nombre de fois demandé dérivable, est préalable à tout calcul. Le but portait sur le test d'une fonction donnée, ici la fonction constante, certains candidats ont essayé d'autres fonctions sans attacher d'importance à l'énoncé et n'ont acquis alors aucun point. Énoncer un résultat général sur les équations différentielles du second ordre à coefficient constant pour justifier la démarche pose problème quand les coefficients ne sont pas constants. Encore une fois, la précipitation et l'inattention à l'énoncé ont sans doute porté préjudice à quelques candidats.

Q27 - La question 27 portant sur l'écriture en éléments simples a été réussie. L'énoncé fournissant complaisamment la solution, certains candidats ont gagné du temps en partant du second membre.

Q28 - Le caractère de dérivation de la fonction n'a pas été abordé, de même la division par des termes nécessite de s'assurer de la validité de cette action.

Q29 - Un écueil présent a été de vouloir résoudre suivant la méthode solution générale et solution particulière alors qu'ici les coefficients ne sont pas constants. Rappelons qu'une primitive de  $1/x$  est  $\ln|x|$  avec des valeurs absolues, qui ont presque tout le temps été oubliées. Cette erreur donne la forme des solutions trouvées et pose problème pour la question suivante.

Q30 - Question souvent réussie dès lors que la question 29 a été correctement traitée.

Q31 - La question de dérivation d'une série entière a été malmenée, le terme de polynôme de degré infini a été lu de nombreuses fois. Des arguments peu scrupuleux de sommation infinie de fonctions infiniment dérivables ont été également présentés. Il est à noter que la dérivation sur un intervalle ouvert est cependant acquise.

Q32 - Question réussie hormis la gestion des indices parfois hésitante ou ignorée.

Q33 - L'unicité du développement en série entière est essentiel ici. La récurrence n'a pas été abordée de manière satisfaisante. Proposer une solution en laissant trois petits points n'est pas conforme à la démarche rigoureuse attendue par un étudiant ayant suivi deux années de préparation aux concours.

Q34 - Question révélant une grave incompréhension de certains candidats sur le sens du rayon d'une série entière. Nombreux sont ceux donnant un rayon nul pour la fonction nulle. Il est à noter qu'un rayon est un nombre et non pas un intervalle ou un ensemble. Ainsi, écrire que  $R$  vaut l'ensemble des réels n'a pas de sens.

Q35 - Si la reconnaissance d'un polynôme n'a posé que très peu de difficulté, la détermination du degré a été ardue.

Q36 - Le recours au lemme d'Abel sans être utilisé correctement dans les copies le citant ne permet pas l'obtention des points attribués à la question.

Q37 - Question réussie par une grande majorité des candidats.

Q38 - Certains candidats ont choisi de répondre à cette question par récurrence alors que l'écriture de 4 termes consécutifs pouvait suffire. Très peu ont abouti à une réponse satisfaisante.

Q39 - Question réussie dans un grand nombre de copies.

Q40 - L'utilisation de la formule de Stirling fournie dans l'énoncé a été globalement réussie quand les calculs ont abouti.

Q41 - La question a été peu traitée mais dans le cas où elle le fut, le critère de D'Alembert fut correctement employé. Peu nombreuses sont les copies ayant finalisé la démarche avec les séries de Riemann.

Q42 - La question finale a été peu traitée mais dans le cas où elle a été abordée, cela fut avec succès.

### 3/ CONSEILS ET BILAN

Les correcteurs encouragent les candidats des sessions à venir à bien élaborer leur stratégie devant une question, en prenant en compte l'énoncé et la particularité de chaque terme. Ainsi le terme « vérifier » semble indiquer une vérification plutôt qu'un recours à une méthode monolithique. Relire ses phrases pour vérifier la justesse (ou du moins l'aspect compréhensible de sa réponse par un tiers) est un atout important au vu de ce que les correcteurs ont pu apprécier lors de cette session. La justesse du propos réside dans la compréhension des termes utilisés et dans un agencement logique et grammaticalement correct. Le candidat doit par ailleurs apprendre à gérer son temps de façon efficace, en s'accordant 10 minutes en début d'épreuve pour lire l'enchaînement des questions, et en gardant 10 minutes à la fin pour se relire et mettre en forme sa copie (encadrer, souligner). L'utilisation d'abréviations dans les copies est à proscrire : cette familiarité voire désinvolture vis-à-vis du correcteur sera-t-elle encore de mise lors des épreuves orales ?

Lorsque le sujet donne une formule à démontrer, le candidat doit chercher à la prouver de façon rigoureuse, et non pas à tordre ses propres calculs faux afin qu'ils cadrent, ni à tenter de justifier la formule à l'aide d'explications obscures. L'honnêteté intellectuelle fait partie des qualités nécessaires à tout ingénieur.

Dans cette session, la rigueur et la droiture intellectuelle ont été grandement appréciées et ont permis de séparer les candidats. Les derniers mots de ce rapport seront pour les aspects relatifs aux probabilités qui ont été omises par certains candidats dans leur préparation, un sujet de concours traité de l'ensemble du programme des deux années. Il est étonnant d'avoir des copies maîtrisant la règle de D'Alembert et ne connaissant pas les probabilités de la loi de Bernoulli.

CCP TSI  
Epreuve de Mathématiques  
Total copies = 1230 - Moyenne = 09,84 - Ecart type = 03,95

■ Fréquence des notes finales

