



1/ Consignes générales

1.1 Présentation de l'épreuve

L'épreuve de mathématiques, d'une durée de quatre heures, est constituée de deux problèmes largement indépendants. Le sujet, dans son ensemble, se donne pour but d'évaluer le plus largement possible chez les candidats la connaissance du cours, la qualité du raisonnement ainsi que l'efficacité.

Le problème I - Étude d'une courbe - aborde l'étude complète d'une courbe paramétrée. Dans la partie I, l'étude de la parité ou l'imparité, les variations d'une fonction, la recherche d'un équivalent et le calcul d'une limite, peuvent être traités avec les connaissances du niveau de l'enseignement secondaire et de première année TSI. Dans la partie II, l'outil développement limité permet de déterminer les coordonnées du vecteur tangent en l'origine. L'étude dans la partie III d'une droite asymptotique à la courbe est très détaillée et le raisonnement est basé sur l'intuition géométrique du candidat. Ce problème se termine par un tracé de la courbe.

Le problème II - Marche aléatoire sur le net - décrit, à partir d'exemples simplifiés, l'algorithme du "PageRank" utilisé par Google. Ce dernier permet de classer par importance des pages internet (ou sites) d'après les liens de ces pages entre elles. Comme la théorie des graphes est absente du programme de la filière TSI, le préambule rappelle l'essentiel. La matrice de transition permet de modéliser le lien entre les sites. Nous exploitons les outils usuels d'algèbre linéaire pour étudier deux exemples à quatre pages, puis à trois pages. Dans la dernière partie du problème et d'une manière simplifiée, on met en œuvre l'algorithme de "PageRank" sur un exemple à trois pages. La conclusion permet d'aboutir à un classement par ordre croissant de la popularité des trois pages.

Le sujet de longueur raisonnable et de difficulté bien ciblée a permis de tester les connaissances et les compétences des candidats tout en vérifiant la compréhension des objets manipulés. L'épreuve a exploré un large éventail de notions du programme des deux années de classes préparatoires aux grandes écoles : équivalents, développements limités, géométrie plane, suites numériques, probabilités, polynômes, valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, diagonalisation, norme d'un vecteur, ...

1.2 Remarques générales

La présentation des copies est globalement satisfaisante. Malheureusement, l'orthographe, la grammaire et la conjugaison sont parfois négligées.

Le sujet, très progressif et sans aucun problème de compréhension, a permis aux candidats sérieux d'avancer substantiellement dans les deux problèmes. Les meilleurs candidats ont traité la totalité du sujet et un grand nombre a abordé avec succès environ 90 à 95 % de l'épreuve. Il y a très peu de copies faibles ou n'abordant qu'un petit nombre de questions.

Il a été noté plus particulièrement cette année que certains candidats confondent rapidité et précipitation. Pour des questions dont le résultat est donné dans l'énoncé, il est clair que les correcteurs attendent l'exposé des intermédiaires de calculs et de raisonnements permettant de s'assurer que le candidat a maîtrisé son calcul.

Nous avons remarqué également un manque de vérification des hypothèses lors de l'application d'un résultat fondamental (parité ou imparité et domaine centré, base et dimension d'un sous-espace propre, racines multiples et dérivées, formule des probabilités totales et système complet d'événements...).

Chez plusieurs candidats, on signale une grande méconnaissance des développements limités (même les plus simples comme $\rightarrow \frac{1}{1-t}$). Des écritures aberrantes ont été observées : par exemple, faire coïncider une fonction et la partie régulière de son développement limité, dériver un développement limité, utiliser "x" quand il s'agit d'une variable en "t" ou encore confondre les développements limités et les développements asymptotiques ! Ce type

d'erreur traduit une incompréhension du cours sur les développements limités et donne au correcteur une très mauvaise impression d'ensemble.

Les théorèmes généraux sur la régularité restent à consolider. Il est inacceptable de rencontrer l'affirmation « la continuité entraîne la dérivabilité » dans plusieurs copies.

Les correcteurs déplorent la fragilité inquiétante dans l'application des résultats fondamentaux d'algèbre linéaire. On relève une confusion importante entre le théorème du rang, le théorème spectral, les théorèmes sur la diagonalisation et bien d'autres.

2/ Remarques spécifiques

- Q1. Question très bien réussie par la majorité des candidats. Quelques-uns ont oublié que -1 est également une valeur interdite. Pour d'autres, le passage en écriture sous forme de réunion d'intervalles a généré des étourderies.
- Q2. Question bien traitée.
- Q3. On constate un oubli systématique de vérifier que le domaine est bien centré en 0. Bien entendu, vérifier la parité ou l'imparité sur un exemple ne permet pas de répondre à la question. Une représentation géométrique aurait pu aider plusieurs candidats à être précis sur la symétrie de la courbe.
- Q4. Question bien traitée dans l'ensemble malgré parfois un oubli de simplification du quotient de puissances entières.
- Q5. Question bien traitée. On regrette le manque de justification de calcul des limites.
- Q6. Le calcul des dérivées a été bien traité. Par contre, la justification de la dérivabilité a été plus hasardeuse. En particulier, la continuité n'entraîne pas sa dérivabilité.
- Q7. Une synthèse des questions précédentes. Des incohérences entre les limites et le sens de variation auraient pu inciter quelques candidats à s'auto-corriger.
- Q8. Des réponses variées et parfois incomplètes. En effet, on remarque un changement de lettre dans le développement limité, des erreurs de signe, un oubli du reste et un amalgame entre développement en série entière et développement limité.
- Q9. Cette question a été bien réussie par ceux qui ont abordé la question précédente. Par contre, la troncature a été rarement appliquée pour respecter l'ordre du développement limité demandé.
- Q10. Cette question a été mal traitée dans l'ensemble. Peu de candidats pensent à faire appel à la formule de Taylor-Young. On rappelle qu'il est absolument faux de dériver un développement limité.
- Q11. Cette question a été bien réussie par les candidats qui ont traité la question précédente.
- Q12. Cette question a souvent été mal traitée. Il suffit pourtant de revenir à la définition du vecteur tangent en un point.
- Q13. Cette question a été moyennement réussie. On s'attend plus particulièrement à une droite verticale et non horizontale asymptote à la courbe.
- Q14. Bien réussie par les candidats qui ont compris le sens de la question.
- Q15. Il est étonnant que cette question de niveau première ne soit pas bien traitée par quelques candidats. Le manque du coefficient du terme dominant dans la factorisation, la forme canonique ou une factorisation forcée fournissent de faux résultats.
- Q16. La question est moyennement réussie par l'ensemble des candidats. La fin de la question a donné lieu à de nombreux "passages en force". Ce manque d'honnêteté intellectuelle a été sanctionné.
- Q17. Des arguments basés sur les limites ou autres ne sont pas convaincants. Il suffit de remarquer que le signe de δ n'est autre que celui de P et de conclure.
- Q18. Il est étonnant de voir une absence d'interprétation graphique malgré un calcul de limite correct.

- Q19. Question traitée par les bons candidats. Quelques-uns n'ont pas respecté l'échelle imposée par le sujet.
- Q20. La symétrie donne le tracé complet de la courbe.
- Q21. Question très bien réussie dans l'ensemble.
- Q22. Beaucoup de bonnes réponses mais hélas sans justification convaincante. Une confusion certaine entre une somme simple/double a été remarquée.
- Q23. Question généralement mal traitée par les candidats. Il est inutile de noyer le correcteur dans d'innombrables arguments qui sont le plus souvent inutiles ou de recopier la réponse à obtenir sans fournir d'explication. L'application du théorème des probabilités totales nécessite un système complet d'événements.
- Q24. Question très bien réussie.
- Q25. La vérification de l'écriture matricielle est bien réussie. Ceux qui ont utilisé une récurrence n'ont pas pu aboutir.
- Q26. Bien traitée dans l'ensemble par les bons candidats. Une récurrence s'impose et il faut éviter des démonstrations déductives. Considérer que la suite est géométrique est hors sujet.
- Q27. Cette question de cours n'a pas été bien traitée par l'ensemble des candidats. On signale des lacunes sur la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
- Q28. Question rarement abordée par les candidats ou mal traitée. Pourtant, une division euclidienne répond à la question.
- Q29. Question bien traitée dans l'ensemble avec quelques surprises. En effet, quelques candidats ont oublié d'appliquer la définition d'une racine multiple d'un polynôme.
- Q30. Il est étonnant de voir dans quelques copies que la dérivée d'un produit est le produit des dérivées. Plusieurs candidats n'ont pas tenu compte de l'ordre de multiplicité de la racine pour simplifier l'équation.
- Q31. La justification du calcul de la limite est presque absente et pourtant quelques candidats ont remarqué la présence d'une forme indéterminée. Le théorème de croissances comparées est très peu évoqué. Les trois dernières limites sont généralement correctes lorsque la première l'est.
- Q32. Question très bien réussie.
- Q33. Question classique bien traitée dans l'ensemble.
- Q34. Question bien traitée avec quelques surprises liées aux racines du polynôme.
- Q35. Beaucoup de maladresses dans la rédaction des réponses à cette question. Elles sont incomplètes et assez souvent mal rédigées. Rare sont ceux qui ont montré que la famille génératrice du sous-espace propre est bien une base permettant de déterminer la dimension. Il est inquiétant de résoudre le système et de proposer le vecteur nul comme vecteur propre.
- Q36. Des fragilités dans la réponse avec des énoncés parfois alambiqués ou fantaisistes, il s'agit pourtant d'un résultat fondamental du cours. Il ne suffit pas que le polynôme caractéristique soit scindé pour que la matrice soit diagonalisable. Il est regrettable de constater une confusion entre inversibilité et diagonalisation ou le théorème du rang/spectral et le théorème sur la diagonalisation d'un endomorphisme.
- Q37. Bien traitée dans l'ensemble. La question a été hélas l'occasion de quelques escroqueries, puisque le résultat était donné.
- Q38. Beaucoup de réponses non achevées.
- Q39. Question bien réussie.
- Q40. Cette question assez calculatoire n'a pas découragé les bons candidats qui l'ont abordée avec succès. On y rencontre beaucoup de réponses non achevées.
- Q41. Question peu réussie dans l'ensemble. Il ne faut pas oublier d'utiliser la question Q38 pour simplifier les calculs et ainsi donner une interprétation cohérente aux limites.

Q42. Une coquille dans l'énoncé sans conséquence sur la compréhension de la question. L'analyse est bien faite par les candidats sérieux.

Q43. Question bien réussie par les bons candidats.

Q44., Q45. et Q46. Peu abordées en général mais bien traitées par les quelques candidats qui ont su prendre un peu de recul par rapport au problème posé.

3/ Conclusion

Les résultats de cette épreuve sont dans l'ensemble satisfaisants et l'équipe des correcteurs a apprécié les copies bien présentées, où les résultats encadrés apparaissent clairement. L'énoncé propose souvent une démarche de résolution qu'il convient de comprendre et de suivre en montrant son savoir-faire, ce qui est l'objet de l'évaluation. Le cours est connu mais les tenants et aboutissants ne sont pas toujours maîtrisés. Connaître le nom usuel des théorèmes de manière sûre est un plus dans une copie. Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.

