1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Présentation de l'épreuve

L'épreuve de Mathématiques, d'une durée de quatre heures, consiste en trois problèmes indépendants, abordant les éléments traités durant les deux années de CPGE. Il adresse tant les capacités de calcul que de raisonnement ainsi que la maîtrise du cours, au travers de l'évaluation de l'ensemble des compétences listées dans les programmes.

Le premier problème propose l'étude d'une suite numérique définie par récurrence. C'est un travail sur le cours d'analyse de première année qui utilise études de fonctions, manipulations algébriques, ainsi que les techniques classiques sur les suites numériques, théorème des accroissements finis, majorations, théorème d'encadrement.

Le second problème propose l'étude d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Il fait intervenir des intégrales généralisées, un travail très classique sur un produit scalaire, la technologie usuelle sur les applications linéaires, linéarité, matrices, lien matrice endomorphisme, diagonalisabilité et recherche de vecteurs propres. La fin du problème introduit de façon très guidée la notion d'endomorphisme symétrique et guide l'usage de cette propriété dans la construction d'une base orthonormée de vecteurs propres de l'endomorphisme proposé.

Le troisième problème propose l'étude d'une chaîne de Markov à trois états issue d'un problème probabiliste élémentaire. On commence par mettre en place la relation de récurrence usuelle sur les états, correspondant ici aux valeurs des variables aléatoires Xn. L'espérance et la variance de ces variables aléatoires sont alors déterminées à l'aide de propriétés matricielles. Ce sujet fait intervenir des techniques classiques de probabilités et de calculs de moments et propose d'utiliser des calculs matriciels élémentaires.

Une bonne proportion du sujet est abordée par une grande partie des candidats et le sujet semble de longueur raisonnable. Une grande partie du sujet est constituée de résultats sans difficulté et non bloquants. Une poignée de questions laisse plus de liberté ou utilise des résultats plus fins tout en fournissant aux candidats en difficulté les moyens de poursuivre le traitement du sujet.

Remarques générales

La présentation des copies est globalement bonne : résultats encadrés, efforts d'écriture et de rédaction, de clarté et de nombreux candidats essayent d'expliquer leurs raisonnements. On note encore quelques copies pour lesquelles ce soin élémentaire n'est pas apporté : les pages ne sont pas numérotées, la numérotation des questions est rare, parfois pas d'encadrement et les résultats ne se dégagent pas du texte, un texte parfois tout en bloc et sans aucune aération et donc de lecture difficile, ratures, etc. Rappelons que ce soin apporté aux copies correspond à une part non négligeable de la note finale. Dans quelques rares copies a pu être observée l'utilisation d'un langage très familier particulièrement déplacé lors d'un concours.

Rappelons que le raisonnement le plus fréquent en Mathématiques est le raisonnement déductif. Les candidats abusent toujours du raisonnement par équivalence sans prendre les précautions parfois nécessaires.

Rappelons aussi qu'un théorème est un résultat basé sur un certain nombre d'hypothèses qu'il convient de vérifier. Lors de l'application d'un théorème du cours, la notation intègre évidemment ce critère et l'énoncé des bonnes hypothèses est un attendu de l'épreuve.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

Problème I

I.1.a Calcul élémentaire massivement réussi.

I.1.b Un certain nombre de candidats ne mentionnent pas la positivité, ne percevant pas le problème de définition lié à la racine carrée. On observe la confusion entre $x^2 - x + 1$ positif et $f(x)$ positif.

I.1.c Peu de candidats font ici des manipulations d'inégalités correctes. Certains choisissent une piste alternative en étudiant le polynôme $x^2 - x + 1$. La croissance de la racine carrée est très rarement mentionnée ici. Trop de candidats concluent après avoir seulement vérifié que $f(0) \leq 10$ et $f(1) \leq 1$.

I.1.d Peu de candidats perçoivent le raisonnement par récurrence ici sous-jacent.

I.2.a Question assez bien réussie. On retrouve encore ici parfois l'argument évidemment faux « continue donc dérivable ». On voit aussi trop souvent que f est une fonction polynomiale, ce qui est évidemment faux. Certains tentent de passer par la définition du nombre dérivé (en passant par la limite du taux d'accroissement), ce qui montrerait au mieux la dérivabilité en un point et non sur R. Parfois, on trouve le tableau de variations de la fonction $x \to x^2 - x + 1$ sans revenir à $f(x)$.

I.2.b Peu de candidats manipulent ici efficacement les inégalités. Certains utilisent le tableau de variations précédent et arrivent tant bien que mal à montrer l'inégalité sur [0,1/2]. Encore une fois, ceux qui travaillent sur les inégalités ne justifient jamais (sauf les meilleures copies) l'élévation au carré.

I.2.c Les tracés de la courbe représentative et de la tangente horizontale sont bien réussis, l'échelle étant en général respectée. Peu de candidats connaissent apparemment la définition de la « première bissectrice ». Les termes de la suite sont placés sur le graphique, rarement au bon endroit. Rappelons qu'ils se construisent avec la bissectrice $y = x$.

I.2.d Question plus ouverte où quelques candidats explorent des pistes diverses fructueuses : études de fonctions ou manipulations d'inégalités. Les tentatives faites sur ces questions plus ouvertes ne doivent pas manquer de la rigueur utilisée pour les questions plus fermées.

I.3.a Question toujours réussie.

I.3.b Peu de candidats abordent correctement cette question. Parmi ceux qui utilisent le théorème des accroissements finis, rares sont ceux qui connaissent parfaitement l'énoncé de ce théorème.

I.3.c Peu de candidats utilisent le résultat de la question précédente, donné, pour déduire ici une formule générale, analogue à celle des suites géométriques. Lorsqu'elle est trouvée, elle est rarement justifiée rigoureusement par une récurrence.

I.3.d Même ceux qui ont traité la question précédente n'ont pas toujours su conclure correctement. Les arguments du théorème d'encadrement sont très rarement bien mis en place.

Problème II

II.1 L'énoncé propose ici de redémontrer un résultat de cours. Peu de candidats le voient et trop citent directement le cours. Notons que dans l'étude d'une intégrale généralisée, la continuité de la fonction doit être mentionnée au préalable et est ici trop rarement citée. On trouve trop souvent confusion entre l'intégrale de 0 à l'infini et l'intégrale approchée de 0 à A.

II.2.a De nombreux candidats traitent correctement cette question. Néanmoins, trop peu rappellent l'hypothèse nécessaire à une intégration par partie, à savoir que les fonctions manipulées doivent être de classe C^1.

II.2.b Résultat de croissance comparée très largement bien traité. On trouve cependant des équivalences fausses du type $A^{N+1}e^{-A} \sim e^{-A}$. On trouve des notations non conventionnelles, comme << pour désigner une certaine domination : le programme fournit les notations de Landau qui doivent être utilisées. Elles doivent néanmoins être utilisées de façon correcte : on a pu voir dans plusieurs copies la domination fausse suivante : $A^{n+1} = o(e^{-A})$.

II.2.c Trop peu de candidats ont perçu que les trois questions constituaient une séquence. Il en résulte une preuve de convergence indépendante de ce qui précède, utilisant souvent un des divers critères de convergence.

II.3 Peu de candidats ont compris le sens de cette question, qui visait à rédiger une récurrence dont les questions précédentes constituaient l'initialisation et l'hérédité. Lorsque c'est le cas, la récurrence porte sur la formule et exceptionnellement sur la convergence.

II.4 Cette question a été peu traitée. De nombreux candidats prennent P et Q tels que $P(t)Q(t) = t^n$.

II.5 De nombreux candidats connaissent la définition d'un produit scalaire. La plupart traitent correctement la symétrie et la bilinéarité, beaucoup la positivité. Rappelons qu'ici, comme dans la question suivante, la linéarité ne signifie pas simplement conservation de la multiplication par les scalaires. Plusieurs candidats oublient le rôle de l'addition. Pour l'aspect défini, rarement bien traité, notons qu'il ne suffit pas que l'intégrale d'une fonction soit nulle pour que la fonction soit nulle sur l'intervalle considéré. La positivité de la fonction, ainsi que sa continuité, sont des hypothèses essentielles qui doivent être mentionnées.

II.6 De nombreux candidats traitent correctement la linéarité ou la stabilité de l'espace mais rares sont ceux qui font les deux.

II.7 Question assez bien traitée.

II.8 Question partiellement traitée en général. Les valeurs propres sont assez bien justifiées. La difficulté consiste en général à étudier la diagonalisabilité de Phi. Les arguments utilisés sont rarement complets ou il y a une confusion entre diagonalisabilité de la matrice associée et diagonalisabilité de l'endomorphisme. Des confusions plus graves apparaissent aussi : on entend parler de dimension de Phi, certains candidats confondent diagonalisabilité et inversibilité. Le déterminant est manipulé parfois avec beaucoup de légèreté.

II.9 Ici, de nombreux candidats traitent cette question d'un point de vue matriciel en oubliant de revenir à l'endomorphisme.

II.10.a Question assez bien traitée.

II.10.b Application immédiate de la question précédente, en général assez bien traitée.

II.10.c Si l'intégration par partie est en général assez bien faite, les candidats ont des difficultés à faire un lien rigoureux avec l'intégrale généralisée étudiée. On retrouve la confusion entre intégrale de 0 à l'infini et intégrale de 0 à A.

II.10.d Application directe de la question précédente, assez bien traitée.

II.11 Question guidée mais assez peu traitée. Les propriétés d'un produit scalaire et des vecteurs propres ne semblent pas assez bien connues pour mener à bien ce calcul.

II.12 De nombreux candidats ne voient pas la question posée ici, à savoir montrer que B est une base. Ils le considèrent comme évident et montrent simplement que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Rappelons que pour que la famille B soit libre, l'orthogonalité des vecteurs ne suffit pas, il faut bien évidemment qu'ils soient non nuls.

Problème III

III.1 Question assez fréquemment traitée. La loi et l'espérance sont à peu près bien traitées. La variance pose des problèmes. On trouve à plusieurs reprises des variances négatives ! Les candidats ne doivent pas chercher à faire systématiquement intervenir une loi binomiale ou géométrique ou uniforme.

III.2 Si de nombreux candidats abordent cette question, peu arrivent à fournir des arguments réellement convaincants, notamment l'indépendance des ampoules. Seuls de rares candidats tentent une modélisation en introduisant des événements et en utilisant le contexte proposé. L'énoncé fournit la notation $P_A(B)$ pour désigner les probabilités conditionnelles. Certains candidats ont choisi de revenir à la seconde notation $P(B/A)$ parfois en ne faisant pas attention à l'ordre des événements. Il convient néanmoins, dans la mesure du possible, de respecter les notations proposées par l'énoncé.

III.3 Une question plutôt bien traitée par un nombre important de candidats.

III.4 Une question fréquemment abordée mais trop peu de candidats mentionnent le système complet d'événements qu'ils utilisent pour l'application de la formule des probabilités totales.

III.5.a Question plutôt bien traitée.

III.5.b Question plutôt bien traitée mais de rares candidats ont encore des difficultés à exécuter un produit matriciel.

III.5.c Le travail sur la suite géométrique est en général bien réussi. Certains candidats ne voient pas le lien avec la question précédente.

III.6.a La formule de transfert est rarement bien expliquée ou appliquée.

III.6.b Une question en général bien traitée.

III.6.c En général bien traitée.

III.6.d Trop de candidats réalisent ici une récurrence inutile.

III.6.e Une question en général bien traitée.

III.6.f Une question modérément abordée mais bien traitée par ceux qui ont achevé les questions précédentes.

III.7 Question parfois abordée mais les calculs sont rarement aboutis, vraisemblablement par faute de temps.

5/ Histogramme

Nombre de copies : 1070
Moyenne : 10,18 / 20
Écart-type : 3,89