## 1/ CONSIGNES GENERALES :

**Présentation de l'épreuve**

L'épreuve de Mathématiques, d'une durée de 4 heures, consiste en deux problèmes indépendants. Le premier problème développe deux méthodes d'approximation du nombre π. Les notions et les outils abordés sont les séries numériques, les séries entières, les intégrales sur un segment et des techniques de majoration élémentaires. Le second problème se propose de démontrer, dans le cadre des matrices d'ordre 3 le théorème d'Hadamard puis le théorème de Gerschgorin qui permet de localiser dans le plan complexe, les valeurs propres d'une matrice. Les thématiques abordées sont : les valeurs propres et le polynôme caractéristique d'une matrice, la géométrie élémentaire dans le plan complexe (disque) et la notion de matrice inversible.

L'épreuve semble de longueur appropriée puisqu'une grande partie des candidats ont abordé la quasi-totalité du sujet. Elle ne soulève aucune difficulté majeure, chaque question est élémentaire et repose sur une bonne connaissance du cours. Certaines questions demandent de vérifier un résultat, ce qui permet au candidat de poursuivre le problème sans être bloqué.

**Remarques générales**

Par les thématiques abordées, le sujet couvre les deux années du programme des CPGE en TSI, que ce soit dans le domaine de l'analyse ou de l'algèbre. Il a permis de classer les candidats dans leur maîtrise du cours, des techniques de raisonnement et de calcul acquises lors des deux années de préparation.

Dans l'ensemble, on constate que les copies sont bien présentées : résultats encadrés, dessins soignés, rédaction des raisonnements. Les correcteurs tiennent bien sûr compte dans leur notation de ces efforts de présentation qui sont pour un(e) futur(e) ingénieur(e) des qualités indispensables.

Cependant, la numérotation des questions doit être indiquée. Ce n'est pas au correcteur de chercher à quelle question peut correspondre une solution proposée.

Certaines copies se sont transformées en jeu de piste, tant les allers-retours entre les questions des problèmes I et II ont été nombreux. Ce procédé indispose le correcteur et donne une image peu flatteuse du travail du candidat, celui-ci cherchant en vain à gagner quelques points plutôt que de s'interroger sur l'enchaînement des questions.

Les règles de logique élémentaires (équivalence, implications et contraposées) ont été malmenées dans de nombreuses copies. D'une façon générale, les candidats manquent de recul par rapport à l'épreuve et sont peu sensibles à l'enchaînement rationnel des questions.

Ainsi, s'il est demandé de démontrer un théorème ou un résultat, les questions de conclusion doivent avoir un lien fort avec l'énoncé. Très peu de questions finales et donc dans la droite ligne de la demande ont été abordées et si c'est le cas, peu de candidat ont apporté le soin nécessaire à leur résolution. Certains se contentent même de faire une redite des questions précédentes sans les mettre en perspective ni les inclure dans l'énoncé du devoir.

On observe également dans une proportion importante de copies un manque de rigueur dans la connaissance du cours. Pour ne citer que quelques points : confusion entre série entière et développement limité, notion de convergence absolue d'une série numérique et définition d'une valeur propre. On a observé également des difficultés dans la manipulation de la valeur absolue ou du module.

Notons pour finir que plusieurs candidats ont obtenu la note maximale.

## 2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

**Problème I - Des approximations de pi**

I.A.1 En général, question de cours réussie. Certains confondent somme partielle et série.

I.A.2 En général, question de cours réussie.

I.A.3 Quelques confusions entre l'ensemble de définition et l'ensemble image de la fonction arctan. Il faut éviter de noter l'ensemble de dérivabilité de la fonction f par $D_{f'}$.

I.B.1 Très peu de bonnes réponses. Certains candidats ne savent pas ce que signifie la convergence absolue. D'autres utilisent le critère de D'Alembert et arrivent à conclure même si le quotient $|U_{n+1}|/|U_n|$ tend vers 1.

Par ailleurs, il ne suffit pas de montrer que le terme général d'une série tend vers 0 pour assurer sa convergence. Attention 1/(2n+1) n'est pas équivalent à 1/n quand n tend vers l'infini.

I.B.2 Pas de problème particulier. Quelques candidats fournissent pour arctan(1) le résultat en degrés de leur calculatrice. Le « dt » est souvent omis dans l'écriture des intégrales.

I.B.3 La première partie de la question ne pose pas de problème. La plupart des candidats achoppent sur la seconde partie en ne réinvestissant pas le rappel de cours de la question I.A.1 pour calculer la somme. Notons de nombreux "passages en force". La malhonnêteté intellectuelle a été sanctionnée.

I.B.4 Cette question élémentaire de majoration d'une intégrale semble difficile pour les candidats.

I.B.5 Question assez peu abordée. Le $(-1)^n$ dans la somme $S_n$ a posé des difficultés pour les encadrements. Dans le pire des cas, on observe des inégalités multipliées par la quantité $(-1)^n$ .

I.C.1 Les réponses sont souvent mal rédigées car la manipulation d'une valeur absolue n'est pas maîtrisée ou esquivée. Une fois encore, certains candidats font preuve de malhonnêteté intellectuelle.

I.C.2 Certains candidats proposent des rangs N négatifs, voire des rangs non entiers ! Il faut avoir un regard critique sur les résultats proposés et corriger un résultat manifestement aberrant.

La plupart des candidats se contentent d'écrire qu'il faut calculer $S_n$ sans préciser ni à quel rang ni comment concrétiser le calcul, à savoir ici multiplier par 4. La phrase la plus courante trouvée dans les copies est "on isole π". De plus, le calcul numérique effectif n'a été que peu abouti. On pouvait lire dans certaines copies que la calculatrice n'a pas la précision nécessaire. Il est bon de rappeler aux candidats que la calculatrice est un outil pouvant être réglé. Ainsi, proposer une valeur de rang i.e un entier, sous forme d'une notation scientifique laisse supposer une mauvaise compréhension de la question.

La majorité des candidats oublie de justifier que l'entier trouvé est bien le plus petit entier satisfaisant la condition demandée.

I.C.3 Cette question ainsi que la question I.D.3 nécessitent un minimum de recul pour expliquer comment les résultats précédents permettent de trouver une approximation de π. Elles ont posé de grandes difficultés. Il peut être judicieux, pour répondre convenablement, de prendre le temps de bien comprendre l'objectif des questions qui précèdent.

Il faut éviter d'écrire une égalité entre la constante π et $4S_N$ puisqu'il s'agit d'une approximation.

La comparaison des deux méthodes doit faire référence à une efficacité de la méthode ou pour le moins à sa vitesse. Les tournures de phrase ambigües ou creuses comme "les méthodes sont différentes" desservent le candidat. Un élève ingénieur et donc un futur ingénieur doit être capable de justifier et comparer des résultats numériques.

I.D.1 Mauvaise lecture de l'énoncé ou confusion entre série entière et développement limité. Le théorème d'intégration terme à terme a été très peu cité. Rares sont les candidats qui précisent que Arctan 0 = 0 (pour effectuer l'intégration terme à terme)

I.D.2 Question réussie dans l'ensemble.

I.D.3 Certains candidats trouvent le bon entier sans expliquer leur démarche.

I.D.4 Question assez peu abordée.

**Problème II - Localisation des valeurs propres**

I.A.1.a Question bien traitée. Certains candidats ont des difficultés à calculer le module d'un nombre complexe.

I.A.1.b Il faut distinguer l'inversibilité d'une matrice et le calcul effectif de l'inverse qui n'est pas demandé ici. Dans la mesure où la calculatrice est autorisée, on peut l'utiliser pour le calcul des déterminants.

Certains candidats ont utilisé le théorème d'Hadamard pour justifier que les matrices A et C sont inversibles alors que l'objectif du problème est précisément de démontrer ce théorème !

I.A.1.c Question bien traitée.

II.A.2.a Cette question a obtenu très peu de bonnes réponses. C'est une question discriminante qui permet de détecter la maîtrise des raisonnements classiques en algèbre linéaire. Les candidats disposent de plusieurs résultats possibles : non-injectivité de l'endomorphisme associé ou bien 0 valeur propre de M. Mais parallèlement, trop de candidats dissertent longuement sur l'existence d'une solution au système matriciel MX = 0 en oubliant que X doit être non nul.

II.A.2.b Question bien traitée par la quasi-totalité des candidats.

II.A.2.c Très peu de rédaction rigoureuse. Le plus simple est de raisonner par l'absurde. Le fait que le vecteur X soit non nul n'implique pas que chacune de ses coordonnées soit non nulle.

II.A.2.d Cette question a posé d'innombrables difficultés en raison de la manipulation des valeurs absolues. La plupart des candidats ne mentionnent pas l'inégalité triangulaire.

II.A.2.e Beaucoup de candidats ne font pas le rapport avec le théorème d'Hadamard.

II.B.1.a En général les dessins sont corrects et soignés mais peu souvent justifiés.

II.B.1.b Étonnamment, cette question a posé des difficultés. Certains confondent union et intersection. On obtient parfois des réponses relativement compliquées (sous forme d'union disjointe ou de différence symétrique).

II.B.1.c Question qui n'a pas posé de problème particulier.

II.B.1.d Assez peu justifiée par un calcul de module. La plupart des candidats se contentent d'une constatation graphique alors qu'une preuve était attendue.

II.B.2.a Bien traitée en général.

II.B.2.b Quelques erreurs de calcul.

II.B.2.c Même commentaire qu'en II.B.1.a

II.B.2.d Même commentaire qu'en II.B.1.d

II.B.3.a On obtient des réponses très variées. Les candidats confondent la définition d'une valeur propre et les théorèmes qui la caractérisent (racine du polynôme caractéristique). La quasi-totalité des candidats oublient la non nullité du vecteur propre.

II.B.3.b Bien traitée en général.

II.B.3.c et II.B.3.D Peu abordées en général mais bien traitées par les quelques candidats qui ont su prendre un peu de recul par rapport au problème posé.

## Conseils et encouragements pour l'année suivante

Le principal conseil que nous aimerions formuler est d'apprendre le cours parfaitement. La spécificité des mathématiques tient dans le fait que cette discipline ne peut souffrir l'à peu près (voir par exemple la définition d'une valeur propre). On ne peut pas appliquer un théorème sans en vérifier toutes les hypothèses.

Il serait également judicieux pour les candidats de lire complètement dans un premier temps l'énoncé du problème afin d'en avoir une vision d'ensemble.

Pour conclure, l'utilisation des calculatrices ne doit pas dispenser de pratiquer quelques calculs simples «à la main» : calcul d'un déterminant d'ordre 3, résolution d'un petit système linéaire... La confrontation avec la technique permet ainsi de mieux appréhender les objets mathématiques manipulés.