



1/ CONSIGNES GÉNÉRALES :

Présentation de l'épreuve :

L'épreuve d'analyse, d'une durée de 3 heures, porte sur l'étude de la fonction Dilogarithme en quatre parties. Cela permet d'explorer un large éventail de notions du programme d'analyse des deux années de classes préparatoires aux grandes écoles : séries de Fourier ; étude d'une fonction définie par une intégrale ; régularité d'une fonction ; développements limités ; développement en série entière ; séries numériques ; intégrales impropres ; équations différentielles...

Ainsi, le choix de ce problème a pour objectif de vérifier le plus largement possible les connaissances acquises en analyse. Les quatre parties du sujet ont un lien entre elles, mais peuvent être traitées indépendamment.

La partie I balaye l'essentiel des connaissances de base sur le développement en série de Fourier d'une fonction.

L'application de la formule de Parseval permet de calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

La partie II fait appel aux connaissances, encore de base, sur les développements limités et leurs applications pour l'étude de la régularité d'une fonction de variable réelle.

La partie III, plus longue que les précédentes, étudie la fonction Dilogarithme L . Le développement en série entière, assez guidé, de la fonction à intégrer permet, à l'aide du théorème d'intégration terme à terme d'une série entière, de déterminer le développement en série entière de L dans $]-1,1[$. Le théorème Radial d'Abel, que nous rappelons, permet de prolonger le développement de L aux extrémités. Cette partie se termine par deux applications.

La dernière partie porte sur l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants. La résolution est guidée et progressive. Cette étude utilise uniquement les outils vus en première année sur les équations différentielles.

Remarques générales :

L'épreuve, claire et sans aucun problème de compréhension, semble de longueur raisonnable et, de fait, a été pratiquement terminée par un certain nombre de candidats.

Les différentes parties sont guidées et la quasi-totalité des résultats est souvent donnée par l'énoncé pour permettre aux candidats qui n'aboutissent pas à une question de poursuivre le problème. Nous constatons que beaucoup de candidats tentent par tous les moyens de faire correspondre les résultats et les correcteurs ont récompensé plutôt l'honnêteté intellectuelle.

De plus, de nombreuses questions étaient très immédiatement accessibles à un candidat maîtrisant son cours. On entend par là principalement : connaître avec précision les définitions, être capable de citer les théorèmes du cours et de les appliquer en vérifiant toutes les hypothèses. Nous déplorons les erreurs mettant en évidence un inquiétant manque d'assimilation, pour de nombreux candidats, des bases du cours d'analyse et en particulier, les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction de variable réelle, la connaissance des formules usuelles de développements limités ou de développements en séries entières, les hypothèses précises du théorème de Dirichlet ou de la formule de Parseval.... Un candidat ayant traité les questions classiques pouvait atteindre largement la moyenne.

Les correcteurs s'inquiètent également de la présence d'un nombre non négligeable de copies avec peu de questions traitées.

Seule la question sur le recollement de la solution d'une équation différentielle de la partie IV a été très peu abordée par les candidats.

Ce problème a classé de manière satisfaisante les candidats. On a relevé quelques copies d'une exceptionnelle qualité. Sans aucun doute, cette épreuve a permis aux candidats sérieux qui ont travaillé les deux années de classes préparatoires de réussir.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Remarques particulières question par question :

I. Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

1. Question correctement faite par la majorité des candidats. Quelques-uns ont oublié de préciser graphiquement les points de discontinuité de la fonction et d'autres ont relié les points de discontinuité par des segments verticaux.
2. De nombreux candidats perdent du temps en recalculant a_n . Dommage de ne pas préciser l'expression de a_n avant tout calcul.
3. Question classique globalement réussie. Dommage de voir quelques candidats conclure rapidement avec beaucoup d'ambiguïté.
4. Il est regrettable de voir les hypothèses du théorème de Dirichlet absentes ou peu précises. Peu de candidats ont conclu correctement cette question.
5. Question réussie globalement. Le correcteur a sanctionné le candidat utilisant une formule fautive et aboutissant au résultat demandé. Les hypothèses sont peu précises ou inexistantes. On remarque aussi que quelques candidats confondent les théorèmes de Dirichlet et de Parseval.

II. Régularité de la fonction f

1. Le développement limité a été mal appréhendé avec de nombreuses erreurs de signe.
2. Il ne faut pas oublier les petits o dans les calculs et de comparer la limite avec $f(0)$ avant de conclure.
3. Des écritures aberrantes : faire coïncider f et la partie régulière de son développement limité ! Ce type d'erreur traduit une incompréhension du cours sur les développements limités et donne au correcteur une très mauvaise impression d'ensemble. De nombreux candidats ont traité cette question comme si la fonction f était $x \mapsto \ln(1-x)$.
4. Question globalement bien traitée. Dommage que les théorèmes généraux sur la dérivabilité soient rarement cités avant la dérivation.
5. Cette question a été mal traitée dans l'ensemble avec un oubli systématique de l'étude de la fonction en 0. Quelques candidats pensent que dériver suffit à montrer la classe 1 d'une fonction.

III. Développement en série entière de L

1.
 - 1.a. Solutions trop confuses le plus souvent : inutile de noyer le correcteur dans d'innombrables arguments qui sont inutiles le plus souvent. Il faut être précis et concis. Quelques candidats considèrent que L est une intégrale dépendant d'un paramètre.
 - 1.b. Nombreuses erreurs : certains candidats ont cru qu'il s'agissait d'une intégrale à paramètre et ont tenté d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. La réponse est un panorama d'expressions fausses de $L'(x)$.
2.
 - 2.a. Des réponses avec beaucoup d'erreurs dans les indices ou dans les signes.
 - 2.b. Bien traitée dans l'ensemble mais il ne faut pas oublier de traiter le cas où $x = 0$.
3.
 - 3.a. Le théorème d'intégration terme à terme n'est pas souvent rappelé et le rayon de convergence est très rarement calculé ici (ni d'ailleurs dans les questions suivantes).
 - 3.b. Solutions très confuses le plus souvent : les candidats se contentent de recopier les hypothèses du problème, sans parvenir réellement ni à dégager l'argument (ou les arguments) clé, ni à construire un raisonnement. Le théorème Radial est très peu cité.
 - 3.c. Même remarque que la question précédente.
 - 3.d. L'étude de la convergence est souvent tentée directement, sans utiliser l'étude précédente en $x = 1$.
4.
 - 4.a. Très peu de réussite bien que la question soit classique. Il ne suffit pas de montrer que la fonction sous l'intégrale tend vers 0 pour assurer son intégrabilité en $+\infty$.

4.b. De grandes difficultés à effectuer le changement de variable. L'intégrale d'un produit ne vaut pas le produit des intégrales.

5.

5.a. L'oubli d'un signe - dans la dérivation de $x \mapsto L(-x)$ a souvent conduit quelques candidats à maquiller les calculs qui suivent pour faire apparaître le signe - qui leur manquait. L'étude aux extrémités -1 et 1 n'est jamais faite.

5.b. Quand la question est abordée, elle a été globalement bien réussie.

IV. Etude d'une équation différentielle

1.

1.a. Question assez souvent bien traitée. Certains candidats n'ont pas pensé à simplifier la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

1.b. Beaucoup de candidats ont préféré utiliser la méthode de la variation de la constante, alors qu'il est plus facile et plus rapide de voir que f est une solution particulière et de conclure.

2. Le correcteur attendait un argument précis (par exemple intégration ou primitivation des solutions précédentes). Il ne suffisait évidemment pas de recopier la réponse à obtenir sans fournir plus d'explication.

3.

3.a. Beaucoup de réponses fausses. Dommage que les candidats n'aient pas compris que la notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale et que par conséquent si on change d'intervalle, les constantes changent également.

3.b. Ceux, hélas très rares, qui ont compris la question précédente ont bien pu traiter cette question.

3.c. Peu de candidats ont traité cette question de synthèse.

Conseils et encouragements pour l'année suivante.

En conclusion, l'équipe des correcteurs donne les conseils suivants aux futurs candidats :

- faire un très sérieux effort d'apprentissage et de compréhension du cours. Les exercices classiques ou incontournables doivent leur permettre de prendre du recul sur l'apprentissage des résultats fondamentaux ;
- être attentif à l'enchaînement des questions. La réponse à une question peut-être assignée dans les questions suivantes. Les indications peuvent être une aide précieuse dans la résolution d'une question ;
- poursuivre les efforts de présentation, de précision et de concision dans la rédaction et éviter l'usage abusif d'abréviations. Les correcteurs apprécient les copies bien présentées, où les résultats encadrés apparaissent clairement. Il est d'ailleurs rappelé que le poids donné à la rédaction, tenue de la copie, ..., est de 1 point sur 20.