1/ CONSIGNES GENERALES :

L'épreuve était composée d'un exercice et d'un problème totalement indépendants entre eux.

L'exercice consistait à faire trouver par deux manières différentes le maximum d'une forme linéaire sur la sphère unité d'un espace euclidien de dimension deux.
Ce résultat était obtenu par des techniques très élémentaires mettant en œuvre les connaissances de base concernant les espaces préhilbertiens (procédé d'orthonormalisation de Schmidt, inégalité de Cauchy Schwarz, …).

Le problème était centré sur la notion d'endomorphisme cyclique et permettait de vérifier la maîtrise des outils élémentaires de l'algèbre linéaire (systèmes libres, bases, matrices, théorème du rang, réduction des endomorphismes…).

Enfin, l'exercice comme le problème fournissaient l'occasion de manier des polynômes, objets introduits en première année.

Le sujet, de longueur raisonnable, comportait beaucoup de questions faciles, ce qui a permis un bon étalement des notes, les plus faibles réussissant les questions les plus abordables et les plus forts parvenant à traiter la quasi-totalité de l'exercice et du problème.

Certaines parties du programme semblent bien assimilées ; c'est le cas par exemple de la réduction des endomorphismes. La recherche du polynôme caractéristique ou des sous-espaces propres relèvent d'un mécanisme standard qui semble bien compris dans l'ensemble.
Par contre, des questions demandant plus de réflexion ont été moins traitées, ou alors elles ont été parfois abordées au prix de calculs lourds et pénibles alors qu'un peu de réflexion permettait de fournir une solution en quelques lignes.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Exercice

Question I
Les candidats savent en général ce qu'il faut vérifier pour montrer que φ est un produit scalaire.
Par contre, peu d'entre eux réussissent à montrer convenablement que la forme bilinéaire φ est définie.
Les correcteurs conseillent aux candidats d'utiliser systématiquement des inégalités larges plutôt que des inégalités strictes lorsque celles-ci ne sont pas indispensables.
Par exemple, si P est un polynôme à coefficients réels, il est incorrect d'écrire :
$\forall t \in [0,1], \quad P^2(t) > 0$ alors que $\forall t \in [0,1], \quad P^2(t) \geq 0$ est par contre exact.

Question II.A
Cette question consistait à montrer que deux formes linéaires sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base.

Très peu de candidats ont réussi à traiter cette question, la majorité d'entre eux ne comprenant pas vraiment ce qui était demandé.

Questions II.B.1 et II.B.2

Ces deux questions sont bien traitées par la majorité des candidats.

Question III.A.1

Bien réussi dans l'ensemble, mais on attendait ici le calcul explicite de $(1|1)$ (même s'il est évident) afin de savoir si le candidat avait bien compris.

Question III.A.2

La majorité des candidats connaît le principe d'orthonormalisation de Schmidt.
Mais sa mise en œuvre sur un exemple concret pose parfois des problèmes.
De plus, il ne faut pas oublier de normer le polynôme P_2.

Question III.A.3

Beaucoup de candidats vérifient qu'un polynôme de la forme donnée dans l'énoncé est de norme 1 (parfois au prix de calculs pénibles, car ils explicitent les polynômes P_1 et P_2).
Mais très rares sont ceux qui abordent la réciproque.

Question III.A.4 et III.A.5

Ces deux questions sont assez peu traitées.
Il est à noter qu'en Physique, il n'est pas rare de transformer une expression de la forme $A\cos(\theta)+B\sin(\theta)$ en une autre de la forme $\lambda\cos(\theta-\theta_0)$.

Question III.B.1

Une moitié environ des candidats connaît l'inégalité de Cauchy Schwarz (certains la confondent toutefois avec l'inégalité triangulaire).
Par contre les cas d'égalité sont plus fantaisistes.
On voit $x=0$, ou x et y orthogonaux, ou encore $x=y$.

Questions III.B.2 et III.B.3

Il s'agissait ici d'effectuer une synthèse à partir du résultat obtenu dans la partie II. et de l'inégalité de Cauchy Schwarz mentionnée à la question précédente.
Dans la question III.B.3, peu nombreux sont ceux qui parviennent à exhiber un polynôme P qui convient car la majorité des candidats oublie que P doit être de norme 1.

Question III.B.4

Cette question n'a pratiquement pas été traitée.
Elle nécessitait l'utilisation des résultats obtenus aux deux questions précédentes.
Les candidats doivent être conscients que l'on peut très bien utiliser un résultat fourni par une question que l'on n'est pas parvenu à traiter.

Problème

Questions I.A.1 et I.A.2

Ces questions, pourtant très simples, ne sont pas correctement traitées par tous les candidats. Certains d'entre eux confondent $\alpha(a)$ et $\alpha^{-1}(a)$.

Pour d'autres, c'est la notation $\alpha^2(a)$ qui pose des problèmes de compréhension.

La signification de la notation α^2 était pourtant rappelée dans l'énoncé.

Question I.A.3

La résolution de cette question nécessitait simplement de savoir comment est définie la matrice d'une application linéaire dans une base.
Certains candidats utilisent une formule de changement de base et trouvent la bonne réponse à l'aide de leur calculatrice. Les correcteurs acceptent toute méthode convenable.

Question I.A.4

La plupart des candidats calculent le polynôme caractéristique de l'endomorphisme α et le factorisent ce qui fournit la réponse à la question.

Question I.A.5

Cette question a dérouté bien des candidats, car la majorité de ceux qui l'ont abordée écrivent que b et $\alpha(b)$ sont colinéaires ce qui conduit, dans le meilleur des cas, c'est-à-dire si on n'a pas dit : il existe un réel λ tel que $\alpha(b)=\lambda\, b$, à l'équation $\begin{vmatrix} 4x-6y & x \\ x-y & y \end{vmatrix}=0$.

Mais il s'agit ensuite d'exhiber un couple $(x, y)\neq(0,0)$ vérifiant cette équation et cela se révèle souvent difficile.

Question I.B.1

Bien traitée dans l'ensemble.

Question I.B.2

Le plus simple était évidemment de montrer que le déterminant de l'endomorphisme β est non nul.
La plupart des candidats y parviennent, mais pratiquement aucun d'entre eux n'utilise le polynôme caractéristique obtenu à la question précédente pour obtenir ce déterminant.

Question I.B.3

Cette question mettait en œuvre des mécanismes inlassablement répétés pendant l'année et a été réussie de façon relativement satisfaisante.

Question I.B.4.

Beaucoup de candidats confondent un endomorphisme et sa matrice dans une base.
Il est à noter que cette question pouvait se résoudre « de tête » en utilisant une base dans laquelle la matrice de β est diagonale et certains candidats l'ont bien compris.
Les correcteurs ont vu des tentatives d'utilisation du théorème d'Hamilton Cayley ce qui est à la fois hors programme et également hors de propos ici, puisque cela ne fournit pas la réponse à la question posée.

Question I.B.5

Cette question a été souvent abordée, mais très rarement bien traitée, la plupart des candidats éprouvant des difficultés à faire la différence entre d'une part « la famille $\left(\mathrm{Id}\ \beta, \beta^2\right)$ est liée » et d'autre part, « la famille $\left(\mathrm{Id}(a)\ \beta(a), \beta^2(a)\right)$ » est liée.

Question I.C.1

En ce qui concerne le calcul de $\gamma\left(X^{n-1}\right)$, on trouve, dans un nombre non négligeable de copies :

$\gamma\left(X^{n-1}\right)=n-1\,X^{n-2}$ à la place de $\gamma\left(X^{n-1}\right)=(n-1)\,X^{n-2}$.

En ce qui concerne le calcul de $\gamma^{k}\left(X^{n-1}\right)$, on trouve toutes sortes de formules (y compris la bonne) et la récurrence se charge de tout justifier, y compris l'injustifiable.

Les correcteurs incitent les candidats à calculer $\gamma^{2}\left(X^{n-1}\right)$, $\gamma^{3}\left(X^{n-1}\right)$, ... et à confronter leur formule avec les résultats obtenus.

Notons également que l'utilisation de factorielles ou du symbole Π n'est pas indispensable ici et conduit très souvent à des formules inexactes alors que l'intuition était parfois juste.

Question I.C.2

Cette question a été bien traitée par les candidats qui l'ont abordée et qui avaient réussi la précédente. Les correcteurs rappellent toutefois qu'une famille libre d'un espace vectoriel n'est pas toujours une base de cet espace vectoriel et qu'on ne parle pas de la dimension d'une famille de vecteurs mais de son cardinal ou de son nombre d'éléments.

Question II.A.1

La formule du binôme est à peu près connue mais l'à peu près ne suffit pas.

Il y a très souvent par exemple des confusions dans les indices et l'indice de sommation démarre souvent à 1 au lieu de 0.

Question II.A.2

Cette question n'a été réussie que par un nombre infime de candidats.

Il était attendu que l'on écrive un polynôme non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sous la forme $\sum_{k=0}^{q} a_k X^k$ avec $a_q \neq 0$ et que l'on applique le résultat prouvé à la question précédente.

Nous rappelons également qu'un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ n'est pas nécessairement de degré $n-1$.

Question II.A.3

Assez peu abordée dans l'ensemble.

Question II.B.1

Cette question a très souvent été mal traitée par les candidats car beaucoup d'entre eux pensent que le polynôme nul est de degré 0.

Du coup, en utilisant le résultat de la question II.A.2, ils trouvent que les polynômes du noyau de δ sont les polynômes de degré 1.

La moindre des choses serait ici de reconnaître que ce résultat ne coïncide pas avec celui donné par l'énoncé, mais on voit plutôt des passages en force, la plupart déclarant sans coup férir que les polynômes de degré 1 sont effectivement les polynômes constants.

Question II.B.2

Curieusement, cette question facile n'a pas rencontré beaucoup de succès.

Ceux qui l'ont abordée ont souvent considéré qu'un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ était de degré $n-1$.

Question II.B.3

La formule du rang est en général assez bien connue.

Par contre, beaucoup pensent que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension $n-1$.

On rappelle enfin que si deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ont la même dimension, ils ne sont égaux que si l'un d'entre eux est inclus dans l'autre ; ce point n'est pas assez souligné par les candidats.

Questions II.C.1 à II.C.4

Ces questions ont été assez peu abordées, hormis la question II.C.2.

Dans cette question, pratiquement aucun candidat n'utilise l'indication de l'énoncé.

La plupart développent le polynôme $\sum_{k=0}^{3} \lambda_i P_i$ et identifient ensuite les coordonnées de deux polynôme dans la base canonique.

Quand cette méthode a fourni un résultat correct, elle a bien sûr été acceptée par les correcteurs.

Néanmoins, on ne peut s'empêcher de se demander ce qu'auraient fait les candidats si on avait par exemple remplacé $n=4$ par $n=8$.

Conclusions et conseils aux futurs candidats

Les correcteurs ont remarqué qu'il suffit de très peu de choses pour gêner les candidats.

Il suffit parfois qu'une question soit posée d'une façon très légèrement différente de ce que l'on propose d'habitude pour que la majorité des candidats s'embarque dans des méthodes longues ou calculatoires qui n'aboutissent pas en général.

Il n'est pas question de piéger le candidat par des questions astucieuses, mais les correcteurs souhaiteraient parfois rencontrer un peu plus de bon sens dans les copies.

A l'heure où interdisciplinarité, conceptualisation ou modélisation sont particulièrement d'actualité, on pourrait envisager que les candidats sachent reconnaître des notions de base, même si celles-ci sont présentées dans des contextes légèrement différents.

Nous conseillons aux futurs candidats d'apprendre consciencieusement le cours (la question de cours consistant en l'énoncé de l'inégalité de Cauchy Schwarz n'a pas rencontré un succès fabuleux) et surtout de bien s'exercer à le mettre en application sur une multitude d'exemples simples et variés (beaucoup de candidats ont visiblement entendu parler du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, mais combien sont capables de l'utiliser en pratique sur une famille de deux vecteurs ?).

On notera qu'aucune des questions de cette épreuve ne comportait de raisonnement dépassant trois ou quatre lignes à condition de savoir mettre en œuvre la bonne notion au bon moment.

Nous engageons également les futurs candidats à s'exprimer et à rédiger clairement, car le métier d'ingénieur qu'ils désirent exercer requiert évidemment des capacités de communication dont ils auront besoin tous les jours. Il est d'ailleurs rappelé que le poids donné à la rédaction, tenue de la copie, …, est de 1 point sur 20. Il ne suffit pas toujours de comprendre, il faut pouvoir expliquer aux autres ce que l'on a compris !