CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

Problème 1

Partie I - Nature d'intégrales généralisées

Soit $a > 0$, on considère les fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^a}.$$

On note I_a et J_a les intégrales généralisées : $I_a = \displaystyle\int_0^1 f_a(t)\mathrm{d}t$ et $J_a = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que I_a converge pour $a < 2$. Qu'en est-il pour $a \geq 2$?

Q2. Soit $a > 1$, montrer que J_a est absolument convergente.

Q3. **a)** Soit $X > 1$, montrer que :

$$\int_1^X f_a(t)\mathrm{d}t = \frac{-1}{\pi} - \frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a} - \frac{a}{\pi}\int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}}\mathrm{d}t.$$

b) En déduire la nature de J_a lorsque $a \in]0, 1]$.

Q4. Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Partie II - Étude d'une série numérique

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\mathrm{d}x.$$

Q5. **a)** Justifier l'existence du terme u_0.

b) On pose $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\mathrm{d}x$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante, puis qu'elle converge vers 0.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente. On appelle ℓ la somme de cette série.

Q6. Soit $N \in \mathbb{N}$, on note S_N la somme partielle au rang N de la série, soit $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$.

Montrer que :

$$\left|S_N - \ell\right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{N+1}\right).$$

Q7. À l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Q8. Exprimer la limite ℓ sous la forme d'une intégrale généralisée que l'on ne cherchera pas à calculer. Ce calcul fera l'objet des parties suivantes.

Partie III - Résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ des équations différentielles (E) et (H) :

$$(E) \quad : \quad y'' + \pi^2\, y = \frac{\pi}{x}\,;$$

$$(H) \quad : \quad y'' + \pi^2\, y = 0.$$

Q9. **a)** Résoudre l'équation (H) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Démontrer le résultat de cours suivant : si y_P est une solution connue de l'équation (E), alors toute solution y de (E) s'écrit sous la forme :

$$y \;=\; y_P \;+\; h$$

où h est une solution de l'équation H.

On note $A_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t$ et $B_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t}\mathrm{d}t$.

On admet dans la suite du problème que ces deux intégrales sont convergentes.

Q10. **a)** On considère la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\; y_0(x) = \cos(\pi x)\left(A_1 - \int_1^x \frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t\right) - \sin(\pi x)\left(B_1 - \int_1^x \frac{\cos(\pi t)}{t}\mathrm{d}t\right),$$

avec A_1 et B_1 définies plus haut.
Montrer que y_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
Pour traiter cette question, il est recommandé de considérer A_1 et B_1 comme deux constantes numériques.

b) Montrer qu'on a la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\; y_0(x) = \cos(\pi x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t - \sin(\pi x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t}\mathrm{d}t.$$

c) Soit $x > 0$.

i) Montrer que $\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos(\pi t)}{t}\mathrm{d}t = -\cos(\pi x)\,\ln(x) + \pi\int_x^1 \sin(\pi t)\,\ln(t)\mathrm{d}t.$

ii) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin(\pi x)\cos(\pi x)\ln(x) = 0.$

iii) Justifier que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi t)\ln(t)\mathrm{d}t$ converge.

iv) Déduire des résultats précédents que la fonction y_0 est prolongeable par continuité en 0.

On note désormais : $y_0(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} y_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t.$

Partie IV - Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t$

Dans cette partie, on considère la fonction de deux variables φ, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par :

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad \varphi(t,x)=\frac{e^{-\pi x t}}{1+t^2}.$$

Q11. Montrer que l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty}\varphi(t,x)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\pi x t}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

converge pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

On note désormais H la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ H(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\pi x t}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Q12. On admet les résultats suivants :

- H est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$,
- $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ H'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t$ et $H''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\mathrm{d}t$

où les intégrales impropres considérées sont convergentes.
Exprimer $H'(x)$ et $H''(x)$ sous forme d'intégrales généralisées. Le calcul de ces intégrales n'est pas demandé.

Q13. Montrer que H est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E) étudiée à la partie III.

Q14. Montrer qu'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ H(x)=\cos(\pi x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t-\sin(\pi x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos(\pi t)}{t}\mathrm{d}t+A\cos(\pi x)+B\sin(\pi x).$$

On pourra utiliser les résultats démontrés à la partie III.

Q15. **a)** En utilisant l'expression initiale de H, montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 0\le H(x)\le\dfrac{1}{\pi x}$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}H(x)$.

b) En utilisant des limites de suites en $+\infty$, montrer que :

$$\left[\lim_{x\to+\infty}\Big(A\cos(\pi x)+B\sin(\pi x)\Big)=0\right]\Rightarrow\Big[A=B=0\Big].$$

c) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ H(x)=y_0(x)$.

d) À l'aide des résultats de la question **Q10c**, montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

Problème 2

Les résultats de la partie II peuvent être utilisés dans la partie III.
La partie IV est une application des parties I et III. Elle peut être traitée en admettant les résultats des parties I et III.

De façon usuelle, on note 0_E le vecteur nul de l'espace vectoriel E.

Partie I - Préliminaires : étude de deux applications linéaires

Soient les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note respectivement f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B. L'application identité de $\mathbb{R}^3$ est notée id et sa matrice associée est notée I.

Q16. **a)** Déterminer $\ker(f - id)$ et $\ker(f + id)$.

b) Calculer A^2.

c) En déduire que f est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

Q17. **a)** Montrer que l'application g est bijective.

b) Déterminer B^{-1}.

Partie II - Questions de cours

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Q18. À quelles conditions peut-on énoncer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ?
Dans ce cas, on note $E = E_1 \oplus E_2$.

Q19. Dans le cas particulier où E est de dimension finie, donner, sans justification, une propriété du cours permettant de démontrer que : $E = E_1 \oplus E_2$.

Q20. On suppose que E est de dimension finie, que $E = E_1 \oplus E_2$ avec $\dim(E_1) \neq 0$ et $\dim(E_2) \neq 0$. Soit $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_q) = (\varepsilon'_i)_{1 \leq i \leq q}$ une base de E_2.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_q)$, obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, est une base de E.

Partie III - Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E.
On suppose que $\dim(E) = 2n$ et $\dim(F) = \dim(G) = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de F vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) : $f \neq id_F$ et $f \neq -id_F$, où id_F désigne l'endomorphisme identité de F ;

(P2) : f est diagonalisable ;

(P3) : l'ensemble des valeurs propres de f, noté Sp(f), vérifie Sp$(f) \subset \{-1; 1\}$.

Q21. Propriétés de l'endomorphisme f de F

a) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ker(f - id_F) \neq \{0_E\}$.
On admet que l'on a aussi $\ker(f + id_F) \neq \{0_E\}$.

b) Pourquoi peut-on dire, sans calculs, que f est un endomorphisme bijectif de F ?

c) Montrer que f est une symétrie vectorielle de l'espace F. Que peut-on en déduire pour l'application f^{-1} ?

Soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$ une application linéaire bijective.
On rappelle que $E = F \oplus G$. On considère φ l'endomorphisme de E défini par ses restrictions aux espaces vectoriels F et G :

$$\varphi_{|F} = g + f \qquad \text{et} \qquad \varphi_{|G} = g^{-1}.$$

On a donc :

$$\forall x \in F,\ \varphi(x) = g(x) + f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ \varphi(x) = g^{-1}(x).$$

Q22. Étude de l'endomorphisme φ de E

Soit $x \in E$. On pose $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in F \times G$.

a) Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de x_1, x_2, f et de g.

b) Montrer que $\ker(\varphi) = \{0_E\}$.
Pourquoi peut-on affirmer que 0 n'est pas une valeur propre de φ ?

c) On suppose que x est non nul.

i) Montrer que x est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ si et seulement si $\begin{cases} g(x_1) = \lambda x_2 \\ f(x_1) + g^{-1}(x_2) = \lambda x_1 \end{cases}$.

ii) Justifier qu'on a alors $x_1 \neq 0_E$ et $x_2 \neq 0_E$.

iii) Montrer que $f(x_1) = \left(\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\right)x_1$.

d) Montrer que si λ est une valeur propre de φ, alors :

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sqrt{5}}{2}$$

avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$. Combien y a-t-il de valeurs propres possibles pour φ ?

Q23. Diagonalisation de φ

D'après la question **Q21**, on a : $F = \ker(f - id_F) \oplus \ker(f + id_F)$.
Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de $\ker(f - id_F)$ et $(\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de $\ker(f + id_F)$. Alors $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F, formée de vecteurs propres de f.

a) Montrer que $\mathcal{B}_2 = \big(g(\varepsilon_1), \cdots, g(\varepsilon_n)\big) = \big(g(\varepsilon_i)\big)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de G.

On sait désormais que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, g(\varepsilon_1), \cdots, g(\varepsilon_n))$ est une base de E.
Soit $x \in E$, on note $(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

On a donc :

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{avec} \quad x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \varepsilon_i \quad \text{et} \quad x_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i\, g(\varepsilon_i).$$

b) Montrer que x est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], & b_i = \dfrac{1}{\lambda}\, a_i \\ \forall i \in [\![1, p]\!], & a_i = \big(\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\big) a_i \\ \forall i \in [\![p+1, n]\!], & a_i = -\big(\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\big) a_i \end{cases}.$$

c) On suppose que $\lambda - \dfrac{1}{\lambda} = 1$.

i) Montrer que le sous-espace propre de φ, associé à la valeur propre λ et noté E_λ, vérifie :

$$E_\lambda = \text{Vect}\Big(\varepsilon_i + \frac{1}{\lambda}\, g(\varepsilon_i)\Big)_{1 \leq i \leq p}.$$

ii) Montrer que $\dim(E_\lambda) = p$.

d) On admet que si $\lambda - \dfrac{1}{\lambda} = -1$, alors le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ, vérifie $E_\lambda = \text{Vect}\Big(\varepsilon_i + \dfrac{1}{\lambda}\, g(\varepsilon_i)\Big)_{p+1 \leq i \leq n}$ et qu'on a $\dim(E_\lambda) = n - p$.

Montrer que φ, endomorphisme de E, est diagonalisable.

Partie IV - Application : étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on pose $E = \mathbb{R}^6$ et φ désigne l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant $(e_i)_{1\leq i\leq 6}$ les vecteurs de la base canonique de E, on pose $F = \text{Vect}(e_1,\, e_2,\, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_4,\, e_5,\, e_6)$.

Q24. Pourquoi peut-on affirmer que $E = F \oplus G$?

Q25. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, tels que $\varphi_{|F} = g + f$.
Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1,\, e_2,\, e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_4,\, e_5,\, e_6)$, montrer que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = A \;\text{ et }\; \text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(g) = B$$

où A et B sont les matrices définies à la partie I.

Q26. À l'aide des résultats de la question **Q16**, déterminer une base de F formée de vecteurs propres de f.

Q27. **a)** Montrer que l'application g est un isomorphisme de F dans G.

b) Exprimer $g^{-1}(e_4)$, $g^{-1}(e_5)$ et $g^{-1}(e_6)$ en fonction des vecteurs $(e_i)_{1\leq i\leq 3}$.

Q28. **a)** En utilisant les résultats des parties I et III, donner les valeurs propres de φ et les dimensions de chaque sous-espace propre de φ.

b) Déterminer une matrice diagonale semblable à M.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1152 – D'après documents fournis