SESSION 2020 **TPC1M**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Lundi 4 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

EXERCICE 1

Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -(2a+2) \end{pmatrix}$.

Q1. **a)** Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M_a est-elle inversible ?

b) Déterminer le rang de M_a lorsque M_a n'est pas inversible.

Q2. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_a associé à une valeur propre λ que l'on précisera. Déterminer le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ.

Q3. **a)** Calculer le polynôme caractéristique de M_a.

b) Montrer que $-a$ est une valeur propre multiple de M_a.

c) Montrer que M_a n'est pas diagonalisable. On distinguera les cas $a = 2$ et $a \neq 2$.

Q4. **Étude d'un cas particulier**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose $\varepsilon_1 = (1, -2, 4)$.

a) Déterminer un vecteur ε_2 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$.

b) Montrer qu'il existe un vecteur ε_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3)$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Q5. **Étude du cas $a \neq -2$**

On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, λ désigne la valeur propre déterminée à la question **Q2**. On rappelle que U est un vecteur propre de M_a, associé à la valeur propre λ.

a) Expliquer pourquoi M_a a exactement deux valeurs propres réelles λ et $-a$.

b) Déterminer un vecteur propre V de M_a, de première composante égale à 1, associé à la valeur propre $-a$.

c) Déterminer $W = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_a W = V - aW$.

d) Montrer que M_a est semblable à la matrice $T_a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$.

Q6. **Application à l'étude d'une suite récurrente**

On considère une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} (u_0,\, u_1,\, u_2) \in \mathbb{R}^3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -18u_n + 3u_{n+1} + 4u_{n+2} \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
Identifier $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = M_a$.

b) Déterminer une matrice triangulaire supérieure T et une matrice P inversible, telles que $A = PTP^{-1}$.

c) En décomposant T sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Donner l'expression de X_n en fonction de X_0, T, P et P^{-1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Un professeur interroge une classe de N élèves, avec $N \in \mathbb{N}^*$. Il dispose d'une liste de questions, éventuellement infinie et pour chaque question il interroge au hasard un élève. Les élèves sont appelés E_1, E_2, ..., E_N, on note $E = \{E_i \,/\, i \in [\![1, N]\!]\}$ l'ensemble des élèves.
On introduit les notations suivantes : pour $i \in [\![1, N]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $Q_{i,k}$ l'évènement "l'élève E_i est interrogé pour répondre à la question numéro k".

On considère que les désignations d'élèves pour les différentes questions sont des évènements mutuellement indépendants et que, pour une question donnée, tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis.
L'univers Ω permettant de décrire cette situation est l'ensemble $\Omega = E^{\mathbb{N}^*}$ des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans E. Ce sont donc les suites notées $(e_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ e_p \in E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'élèves différents interrogés sur l'ensemble des n premières questions posées.
Par exemple pour $n = 6$ et $N = 15$, si on a interrogé successivement les élèves : E_3, E_1, E_7, E_1, E_{12} et E_3, on a $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 3$, $X_5 = 4$ et $X_6 = 4$.
On notera qu'on a obligatoirement $X_1 = 1$.

On note U_n la matrice à N lignes et 1 colonne définie par : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$, où $P(X_n = i)$ désigne la probabilité d'avoir interrogé i élèves différents sur l'ensemble des n premières questions, avec $i \in [\![1, N]\!]$.

Partie I - Étude de $\mathbf{X_2}$

Considérons dans cette partie que le professeur pose deux questions.

Q7. Déterminer $X_2(\Omega)$.

Q8. Montrer que $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{N}$, puis finir de déterminer la loi de probabilité de X_2.

Q9. Calculer l'espérance de X_2.

Partie II - Modélisation dans le cas général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geq 2$. On considère la variable aléatoire X_n.

Q10. **a)** Déterminer $X_n(\Omega)$.

b) Si $n < N$, déterminer $P(X_n = i)$ pour $i \in [\![n+1, N]\!]$

c) Que vaut $P(X_n = 1)$?

d) Soit $i \in [\![2, N]\!]$, montrer que :

$$P(X_n = i) = \frac{i}{N} P(X_{n-1} = i) + \frac{N-i+1}{N} P(X_{n-1} = i-1).$$

Q11. Montrer qu'il existe une matrice $A_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad U_n = A_N \, . \, U_{n-1}.$$

Préciser les coefficients de la matrice A_N.

Partie III - Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on étudie le cas particulier $N = 5$.

Q12. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, n \geq 2, \quad U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} U_{n-1}.$$

On pourra utiliser les résultats de la question **Q11** ou calculer directement $P(X_n = i)$ pour $n \geq 2$ et $i \in [\![1, N]\!]$.

Q13. On pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} V_1 + 4\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} V_2 + 6\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} V_3 + 4\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} V_4 + V_5.$$

Q14. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q15. **a)** Justifier que X_n admet une espérance $E(X_n)$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = E(X_n)$.
On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{4}{5} u_n + 1.$$

b) Déterminer une suite constante $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_{n+1} = \dfrac{4}{5}\lambda_n + 1$.
On note λ la valeur de cette suite constante.

c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \lambda$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et déterminer l'expression générale de v_n.

d) En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ce résultat est-il compatible avec la valeur $E(X_2)$ calculée à la question **Q9** ?

e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$. Quelle interprétation peut-on donner du résultat ?

EXERCICE 3

Soit un réel α vérifiant $\alpha \in]0,1]$. On appelle série de Gregory de paramètre α, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\alpha^n}{2n+1}$.
Dans l'ensemble de l'exercice, on note G_α une série de Gregory ainsi définie.

Partie I - Étude de la convergence de la série G_1

On note de façon usuelle $g_k = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ le terme général de la série G_1.

Q16. Expliquer pourquoi la série G_1 n'est pas absolument convergente.

Q17. On définit la suite (S_n) des sommes partielles de la série G_1 par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $v_n = S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
On a ainsi : $u_2 = S_4 = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4$, et $v_2 = S_5 = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

d) Montrer que la suite (v_n) est majorée par u_0. En déduire qu'elle est convergente de limite ℓ_1.

e) De façon similaire, montrer que (u_n) est convergente de limite ℓ_2.

f) Montrer que la série G_1 converge et exprimer sa somme en fonction de ℓ_1 et ℓ_2.

Partie II - Étude d'une série de Fourier, calcul de la somme de G_1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodique, impaire, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in]0,\pi[,\ f(x) = 1 \\ f(0) = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Q18. Représenter graphiquement f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Q19. Déterminer la série de Fourier de la fonction f.

Q20. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

Q21. En déduire la valeur de la somme de la série de Gregory G_1, définie en **partie I**.

Partie III - Séries de Gregory pour $\alpha \in]0, 1[$

Q22. Montrer que G_α est absolument convergente pour tout $\alpha \in]0,1[$.

On note désormais $G(\alpha)$ la somme de la série G_α. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a : $G(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{2n+1}$.

Q23. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Q24. En déduire que la fonction arctan est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de la série entière ainsi déterminée ?

Q25. En déduire l'expression de $G(\alpha)$ à l'aide de la fonction arctan pour tout $\alpha \in]0,1[$.

On pourra remarquer que $\alpha = (\sqrt{\alpha})^2$ et faire apparaître $\sqrt{\alpha}$ dans l'expression du terme général de la série $(-1)^n \dfrac{\alpha^n}{2n+1}$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1175 – D'après documents fournis