1/ REMARQUES GÉNÉRALES :

Le sujet comportait deux problèmes indépendants. Le premier, constitué de trois parties, portait sur l'étude de l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. Dans une première partie assez simple d'algèbre linéaire, on s'intéressait aux solutions polynomiales de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. Une seconde partie permettait de déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$, toujours dans le cas où a et b sont des constantes réelles et la troisième partie s'intéressait à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur un intervalle du type $]\,0,R\,[$ dans le cas particulier où $a = 1$ et b est la fonction carré. Le second problème était un problème de probabilités dont l'objectif était de montrer la loi forte des grands nombres dans le cas particulier des variables aléatoire discrètes bornées. Il était constitué d'une première série de questions proches du cours sur l'inégalité de Markov, puis d'une série de questions abordables d'analyse et se terminait par des questions de probabilités qui, bien que guidées, se sont avérées difficiles pour les candidats.

Les correcteurs ont noté une fois encore que les copies étaient dans l'ensemble bien présentées et agréables à lire. Il reste cependant toujours quelques copies très difficiles à déchiffrer. Rappelons que la présentation est prise en compte dans la notation.

La grande majorité des candidats a abordé les questions dans l'ordre mais a délaissé une bonne partie du sujet. Le sujet offrait un grand nombre de questions très abordables tant en algèbre qu'en analyse. Certains candidats n'ont pas hésité à laisser de côté une grande partie du sujet pour se concentrer sur la question Q35 et les suivantes qui demandaient de mettre en œuvre des compétences élémentaires sur l'étude de fonctions réelles. À l'inverse, les correcteurs regrettent de voir certains candidats faire preuve d'aisance dans des questions techniques du problème 1 mais piétiner sur les questions difficiles et ne pas garder assez de temps pour traiter les questions simples du problème 2. Quelques copies, souvent de bonne qualité, ont abordé le problème 2 en premier.

Le sujet offrait à plusieurs reprises l'opportunité de faire état de ses connaissances de cours (théorème de Cauchy linéaire, rayon de convergence d'une série entière, produit de Cauchy de deux séries entières, inégalité de Markov, développement en séries entières de l'exponentielle et du cosinus hyperbolique). Le constat est inquiétant : beaucoup de candidats ne connaissent pas correctement ou insuffisamment leur cours et un certain nombre ne savent pas rédiger un énoncé permettant de définir correctement un objet mathématique. On pourra citer à titre d'exemple les nombreuses copies définissant le rayon de convergence d'une série entière comme un réel R tel que pour tout $x \in]-R, R[$, la série entière converge.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES :

2.1 Problème 1

De manière générale, ce problème a été plus abordé que le second et la première partie de celui-ci a été mieux réussie que la suite.

Partie I

Les questions Q1 à Q9 ont été assez bien traitées. Notons cependant que dans Q1, peu de candidats ont étudié spécifiquement le cas $k = 0$. Dans Q4, on voit parfois des matrices avec des coefficients polynomiaux montrant la difficulté pour certains candidats de travailler avec un espace vectoriel de polynômes. Rappelons au passage qu'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est de degré inférieur ou égal à n et non de degré exactement égal à n.

Dans Q7, certains ont déterminé la matrice de Φ_n dans la base canonique, n'ont pas remarqué qu'elle était diagonale et ont alors utilisé le théorème spectral ou le polynôme caractéristique pour prouver la diagonalisabilité de Φ_n.

Les questions Q10 à Q12 ont souvent été très mal traitées ou sautées. Alors qu'on vient de prouver que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, on trouve ainsi comme noyau $\{m_1, m_2\}$ ou encore des fonctions logarithmes ou exponentielles. Les quelques réponses correctes sont souvent peu argumentées.

Partie II

La question Q13 a été décevante, le cours n'est pas su ou la question mal comprise. Peu de candidats ont compris que le théorème de Cauchy ne s'appliquait pas sur $\mathbb{R}$. D'autres candidats se sont contentés d'écrire que l'équation différentielle admettait une unique solution pourvu que les conditions initiales soient fixées, alors que la question portait sur la structure de l'ensemble des solutions. Les questions Q14 et Q15 ont été dans l'ensemble assez bien traitées, bien que certains candidats ne se soient pas préoccupés des intervalles de solutions et que d'autres, après avoir raisonné avec des égalités de fonctions correctes ($g'' + (a - 1)\, g' + bg = \exp^2 \times y'' \circ \exp + a \exp \times y' \circ \exp + b\, y \circ \exp = ...$), ont conclu en effectuant le changement de variable $x = \exp$.

La question Q16 était très proche du cours. Elle a été relativement bien traitée, bien que certains candidats n'aient pas su donner les solutions réelles dans les deux cas. Certains candidats ont par exemple affirmé que dans le cas $a = 1$ et $b = 4$, puisque l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle, l'équation différentielle n'a pas de solution réelle. La question Q17 a été à l'image des questions Q14 et Q15. La question Q18 a été très peu traitée entièrement, notamment la partie concernant les raccords de solutions.

Partie III

Cette partie était l'occasion de tester l'aisance des candidats avec les séries entières. Les correcteurs constatent qu'il s'agit d'un thème difficile et mal maîtrisé pour de nombreux candidats.

Très peu ont su restituer correctement la définition du rayon de convergence d'une série entière à la question Q19. Beaucoup ont affirmé que le rayon de convergence est un nombre réel R tel que pour tout $x \in \,]-R, R[$ la série entière converge. Pour d'autres, le rayon de convergence est un nombre complexe et suivent alors des inégalités avec des nombres complexes. Il n'est pas rare de lire que le rayon de convergence est un intervalle. Pour la question Q20, très peu de candidats ont justifié que J_0 était dérivable avant de dériver terme à terme et trop de candidats ont oublié de rappeler l'unicité du développement en série entière. La récurrence a été rarement rédigée correctement. Lorsque les candidats ont vu que la série entière de la question Q21 était lacunaire, ils n'ont pas souvent pensé à exclure le cas $x \neq 0$ au moment d'utiliser la règle de d'Alembert.

La majorité des candidats a bien vu qu'à la question Q23 il s'agissait d'un produit de Cauchy mais à nouveau l'identification des coefficients de la série entière n'a pas été souvent justifiée. Ceux qui ont traité la question Q24 sont parvenus au résultat. La question Q25 a été correctement traitée par peu de candidats, la plupart se contentant de poser la récurrence et de vérifier l'inégalité pour k = 0. À la question Q26, beaucoup ont cherché à comparer R_α et R_β. D'autres ont tenté un critère de d'Alembert alors qu'ils ne disposaient que d'une majoration des $|\beta_k|$.

L'une des deux implications de la question Q27 a parfois été correctement montrée, mais jamais les deux et beaucoup se sont perdus dans les calculs. La question Q28 était une question simple qui a rapporté des points à ceux qui l'ont traitée. Les questions Q29 et Q30 en revanche étaient plus difficiles et n'ont été correctement traitées que par quelques candidats.

2.1 Problème 2

Le second problème a été moins abordé que le premier, sans doute par manque de temps, mais également parce que les candidats semblent moins à l'aise avec les probabilités.

Les questions Q31 à Q33, qui pouvaient rapporter des points facilement, ont de nouveau mis en évidence la mauvaise connaissance du cours de beaucoup de candidats. La notion de variable aléatoire discrète n'est par exemple pas comprise par un nombre important de candidats. Certains pensent qu'une variable aléatoire discrète est finie, d'autres qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ces derniers, voyant que l'on supposait X à valeurs dans $[-1, 1]$, en ont alors conclu que X était à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. L'hypothèse de positivité de la variable aléatoire a été souvent oubliée dans l'énoncé de l'inégalité de Markov. Une démonstration de ce résultat a été parfois proposée, mais rarement avec la rigueur nécessaire. À la question Q34, l'idée générale a été globalement comprise mais peu ont utilisé correctement l'indépendance des X_i et le fait qu'elles suivent la même loi.

Beaucoup de candidats ont sauté les questions Q31 à Q34 pour répondre directement à Q35. Les questions Q35 à Q38 demandaient peu de connaissances de cours et ont été abordées par la plupart des candidats qui y ont répondu au moins partiellement. Plus précisément, nombreux sont ceux qui sont parvenus à montrer que g'_a est décroissante (en calculant g''_a ou en raisonnant directement sur g'_a). Il reste cependant un nombre non négligeable de candidats qui ne savent pas dériver $x \to a^x$. La deuxième partie de la question a posé un peu plus de problèmes mais a été traitée de manière satisfaisante par un nombre significatif de candidats. Ceux qui s'en tirent le mieux sont ceux qui invoquent le théorème de Rolle pour montrer que g'_a s'annule sur $]-1, 1[$. À la question Q36, l'application de Q35 avec $a = e^t$ a été vue par la majorité des candidats, bien qu'ils n'ont pas toujours pensé à vérifier que $a > 1$. La question Q37 pouvait rapporter des points facilement, mais a été trop souvent mal justifiée. La question Q38 a été traitée de manière satisfaisante, la rédaction de la première inégalité était parfois maladroite.

Les questions Q39 et Q40 ont été plutôt bien traitées par les candidats qui sont arrivés jusque là, sauf la deuxième partie de Q40 qui a été rarement justifiée correctement. De trop nombreuses copies ont justifié la convergence de la série à la question Q41 par $\lim_{n\to\infty} e^{-n\varepsilon^2/2} = 0$. Les questions Q42 à Q44 ont été peu abordées, mais ont permis à certains de glaner quelques points, en remarquant par exemple l'utilisation du résultat de continuité décroissante d'une probabilité.