RAPPORT SUR L'EPREUVE ECRITE 2015 DE MATHEMATIQUES DE LA FILIERE PC

1/ CONSIGNES GENERALES :

Présentation du sujet :

Le sujet proposait l'étude de deux problèmes indépendants d'analyse et d'algèbre. Le problème d'analyse comportait une partie sur l'étude d'une suite particulière de fonctions et une deuxième partie (largement indépendante de la première partie) faisant le lien avec la formule de Bernstein en probabilités. Les différents modes de convergence d'une suite de fonctions, d'une série de fonctions, la convergence d'une intégrale ainsi que différents théorèmes sur les intégrales étaient abordés. Quelques questions permettaient également d'évaluer la compétence de représentation et la capacité à faire un lien transversal avec les questions précédemment posées. Pour la seconde partie, des résultats sur la loi de Poisson, la formule de Taylor avec reste intégral et les propriétés de l'intégrale étaient réinvestis à partir de rappels de cours. On finissait cette partie par une prise de recul du candidat sur les méthodes permettant d'appréhender la formule de Bernstein.

Le problème d'algèbre étudiait quelques aspects simples d'algèbre linéaire et bilinéaire sur les matrices à valeurs dans {-1,1}. Les représentations matricielles en petite dimension devaient permettre aux candidats de se familiariser avec les définitions dès le début du problème. Les propriétés d'une symétrie, la réduction matricielle, les matrices orthogonales, les opérations élémentaires sur les lignes, les propriétés du déterminant correspondaient aux notions principales abordées.

Le sujet, dans son ensemble, se donnait pour but d'évaluer chez les candidats les compétences explicitement détaillées dans le nouveau programme de PC. Pour cela, un grand nombre de notions présentes aussi bien dans le programme de première que de deuxième année étaient sollicitées. Les questions qui nécessitaient des connaissances du nouveau programme non présentes dans l'ancien programme étaient volontairement peu nombreuses et de difficulté très raisonnable. La longueur relative du sujet était un point essentiel d'évaluation de l'efficacité des candidats.

Problèmes constatés par les correcteurs :

Les correcteurs de cette épreuve se sont accordés sur une certaine hétérogénéité et sur la relative faiblesse générale du niveau des candidats. Le soin et la présentation des copies sont très bons dans une grande majorité des cas. Les copies peu remplies sont très peu nombreuses. Cela n'empêche pas pour autant d'avoir cette année une proportion plus importante qu'en 2014 de copies remplies d'erreurs de calculs et de raisonnements erronés. Les candidats ayant réussi à traiter la quasi-intégralité du sujet sont de l'ordre de 10 % mais les copies où tout est juste sont très rares. Presqu'un tiers des candidats n'a quasiment pas abordé la partie 2 du problème 1 à cause des calculs de probabilités. Les défauts de rédaction en analyse et en algèbre ont très largement obéré les notes de l'ensemble des copies.

On rappelle à cette occasion qu'une partie conséquente du barème porte sur la présentation et la qualité de rédaction. Cela permet aux correcteurs de valoriser des compétences essentielles tout au long du sujet. On a vu cette année beaucoup trop de confusions, d'imprécisions et de malhonnêtetés dans la manipulation des comparaisons de fonctions, dans l'étude de la convergence d'intégrale, dans l'utilisation des théorèmes fondamentaux d'analyse et d'algèbre et surtout dans le calcul élémentaire sur les probabilités.

Devant la longueur du sujet, beaucoup de candidats ont confondu rapidité et précipitation. On déplore ainsi une grande perte de temps (sans garantie d'obtenir effectivement les points escomptés) avec d'étourdissants calculs de polynôme caractéristique et de dimensions de sous-espaces propres pour montrer que la matrice symétrique réelle proposée était diagonalisable. On ne saurait donc trop insister sur le fait de lire attentivement l'énoncé dans son ensemble puis dans ses détails avant de se lancer dans une méthode chronophage ne tenant pas compte de l'articulation des questions les unes par rapport aux autres.

Pour les questions liées à la représentation graphique de fonctions, les réponses ont été nombreuses et souvent pertinentes. Pour proposer des méthodes afin de conjecturer la valeur d'une limite et faire une analyse critique de ces méthodes, les réponses ont été bien moins nombreuses. Pour la recherche d'exemples et de contre-exemples afin d'illustrer les ensembles introduits en début de deuxième partie, le nécessaire a presque toujours été fait. Cela nous conforte dans l'idée que les candidats ne manquent pas d'intuition ni de sens de l'interprétation mais qu'ils manquent plutôt de profondeur dans l'investissement des notions vues tout au long de leurs années de classe préparatoire.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Problème 1 (Analyse et probabilité)

Partie I (Analyse) :

1.a. Dans l'étude des variations de la fonction f_n, les correcteurs attendaient la détermination des sens de variations de f_n ainsi que les valeurs de $f_n(0)$ et de $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x))$. Les sens de variations de la fonction f_n ont été très bien trouvés mais le reste a été omis dans près de la moitié des cas. Cela n'empêchait pas d'obtenir le maximum correct, mais pour la question 1.c, il était utile de signaler le signe de f_n.
1.b. Très réussie.
1.c. Quelques confusions dans les notations et la rédaction. Certains candidats majorent $|f_n(t) - f(t)|$ par une quantité indépendante de t qui tend vers 0. On attend alors qu'ils en déduisent une majoration de la norme infinie de f_n- f . Sans cet argument, la distinction entre convergence simple et convergence uniforme n'est pas faite.
2.a. Beaucoup de problèmes de compréhension et de rédaction sur la comparaison des fonctions et la convergence des intégrales. Un tiers des candidats n'a pas conscience du problème de convergence en 0. L'étude en + ∞ est mieux menée sauf pour ceux qui croient qu'une limite nulle pour la fonction assure la convergence de l'intégrale. L'hypothèse de positivité dans le théorème de comparaison est presque systématiquement omise. La traduction du théorème de comparaison en terme d'intégrabilité évite le problème de l'hypothèse de positivité mais ne donne malheureusement que des conditions suffisantes de convergence.
2.b. Mêmes remarques qu'en 2.a.
2.c. La nécessité d'utiliser le théorème de Leibniz n'est pas en cause ici, mais la connaissance précise des hypothèses de ce théorème laisse beaucoup à désirer. La dérivée de x⟼t^x est fausse dans un tiers des cas si bien que le lien avec la question 2.b est vide. Beaucoup de difficultés avec l'hypothèse de domination qui se faisait différemment sur]0,1] ou sur [1,+ ∞[.
2.d. La question pouvait se rédiger en une ligne par 2.a. Que de temps perdu à refaire la question 2.a. avec x = n.
2.e. Assez bien réussie dans l'ensemble.
3.a. Bien réussie.
3.b. Beaucoup se persuadent d'avoir réussi cette question alors que le niveau de rédaction exigé est très rarement atteint : « Une primitive de f_n est de classe C^1 car f_n est continue. Alors H_n est de classe C^1 par produit et somme de fonctions de classe C^1 ».

3.c. Très bien réussie.
3.d. La valeur de la bonne limite a été trouvée dans un tiers des cas, mais la justification n'était pas toujours limpide. Que ce soit en utilisant la convergence uniforme sur R ou un théorème de convergence dominée, le point essentiel était alors de faire apparaître la convergence uniforme ou l'hypothèse de domination sur le segment [0,x].
4.a. Bien réussie.
4.b. Très bien réussie.
5.a. Moins de la moitié des candidats fait référence à la série exponentielle. Dans les autres cas, le critère de D'Alembert ou un théorème de comparaison est utilisé.
5.b. On pouvait se contenter ici d'une majoration de la norme infinie ce qui évitait beaucoup de complications dans lesquelles certaines copies ont sombrées.
5.c. Mieux réussie que les questions 5.a et 5.b.

Partie II (Probabilité) :

1.a. Pour montrer que S_n suivait une loi de Poisson de paramètre n, il suffisait d'évoquer un raisonnement par récurrence qui utilisait dans son hérédité le résultat admis en début de partie 2 et le résultat du cours vu sur la somme de deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson. Pas de problème pour donner l'espérance et la variance de S_n sauf pour ceux qui se sentent obligés de refaire un long calcul avec des sommes infinies.
1.b. Question très mal réussie. Les formules donnant E(aX+b) et V(aX+b) sont très mal connues et souvent mal maîtrisées.
1.c. Beaucoup de confusions sont ressorties de cette question. Le résultat étant donné, tous les moyens étaient bons pour obtenir le résultat voulu ce qui a largement pesé en défaveur des candidats pour leur évaluation globale. Les bons candidats ont su se démarquer ici.
2. La question demandait l'application de la formule de Taylor couplée avec un changement de variable. Beaucoup de raccourcis illicites là aussi.
3.a. Bien réussie.
3.b. Question plus difficile, assez peu traitée, mais bien réussie par ceux qui ont pensé à utiliser une intégration par parties.
3.c. La décroissance de la suite a été souvent parachutée sans utiliser ce qui avait été vu sur les variations de la fonction f_{n+1}. Le théorème sur les suites monotones pose toujours de gros problèmes de rédaction. Les hypothèses minimales « décroissante et minorée » sont rarement dégagées pour obtenir la seule existence de la limite l. Les inégalités sur l sont alors systématiquement obtenues sans l'usage d'aucun théorème à partir du fait que les termes de la suite sont dans [0,1[.
3.d. Très peu traitée alors qu'on attendait essentiellement de la part du candidat de faire le lien avec certaines des questions précédentes. Une méthode probabiliste consistait à évoquer un grand nombre de simulations des variables de Poisson pour aboutir à des valeurs de S_n^* permettant de constituer une valeur moyenne de P($S_n^* \leq 0$) pour n grand.
4.a. Par le nouveau programme, on pouvait donner le résultat sans refaire de calcul de somme infinie. Beaucoup de candidats ont perdu du temps à refaire le calcul juste en s'ajoutant un handicap de temps.
4.b. Peu traitée et mal réussie par ceux qui l'ont essayée. La formule souvent évoquée faisait comme si S_n^* était à valeurs entières et le théorème de transfert prenait alors le relais par de longs calculs farfelus. Les manipulations faites en cours d'année sur la série génératrice, vue en tant que fonction de la variable t, n'ont pas été très éclairantes. L'utilisation de la linéarité de l'espérance a échappé à presque tous les candidats.
4.c. Rarement traitée et jamais réussie jusqu'au bout.

Problème 2 (Algèbre)

1, 2 et 3.a. Très bien réussies.
3.b. Confusion très fréquente entre endomorphisme symétrique et symétrie. Les résultats vus en première année sur les symétries et leur interprétation en terme de diagonalisation vue en deuxième année sont très rarement compris et cités.
3.c. Cette question a suscité dans trois quarts des cas des calculs fastidieux et parfois faux de polynôme caractéristique et de dimension des sous-espaces propres. Les correcteurs insistent sur le fait que tout candidat doit réfléchir à utiliser les méthodes les plus économes en temps avant d'employer des méthodes plus risquées en termes de calcul et de temps.
3.d. Une vraie catastrophe. La quasi-intégralité des candidats est persuadée que toute matrice P obtenue comme matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres sera orthogonale du fait que A est symétrique. Même l'orthogonalité entre les différents sous-espaces propres est rarement citée et encore plus rarement l'orthonormalisation des bases au sein des sous-espaces propres qui sont de dimension supérieure ou égale à 2.
4. La première inclusion (qui était le point essentiel) a été assez bien montrée. Pour le cardinal de B_n, les correcteurs ont pu voir des résultats extrêmement divers et peu de fois le résultat correct.
5. Deux implications souvent correctes, mais la troisième erronée à cause de la confusion très fréquente entre les deux propriétés « une matrice est orthogonale » et « les colonnes d'une matrice forment une famille orthogonale ». Même si le terme de « matrice orthogonale » est un piège, on s'attendait à ce que des élèves ayant manipulé cette notion à de multiples reprises au cours de leur deuxième année de classe préparatoire sachent faire la différence. Notons que, pour répondre à une question, il est toujours plus rentable pour la note et pour le temps passé d'admettre le résultat plutôt que d'en arriver à contredire les connaissances acquises.
6.a. La réponse quasi-systématique a été que les déterminants sont les mêmes. Il y a donc ici une confusion entre la conservation du déterminant et la conservation de la non-nullité du déterminant.
6.b. Plus de réussite dans cette question que dans la précédente. La technique du développement du déterminant par rapport à une rangée est bien acquise.
6.c. La multilinéarité du déterminant a été rarement bien utilisée dans cette question. Quelques-uns ont imaginé de reproduire les mêmes opérations élémentaires pour aboutir, à tort, à une matrice B'' ayant des coefficients - 4, 0 ou 4 et finir par une matrice triangulaire adéquate.
6.d. Quand cette question était traitée, le résultat pour |det(A)| était juste mais la suite de la question n'a quasiment jamais été correcte.
7.a. La linéarité de τ_r méritait des points quand elle était détaillée. La bijectivité de τ_r pouvait se traiter de multiples façons. Quelques candidats pensent que comme τ_r va de R^r dans R^r, alors $\mathrm{Im}(\tau_r) = \mathrm{R}^r$ si bien que τ_r est automatiquement surjective.
7.b. Question toujours réussie par ceux qui l'ont traitée.
7.c. Bien réussie par ceux qui ont traité la question.
8. Une moitié seulement de ceux qui ont traité cette question se sont appuyés sur les résultats de la question 7.
9.a et 9.b. Bien réussies par ceux qui ont traité ces questions.
9.c. Question très peu traitée. L'existence de la borne supérieure n'est qu'exceptionnellement abordée. Quelques candidats ont pensé à la matrice de B_n n'ayant que des coefficients 1 et au fait qu'elle possédait n comme valeur propre.