CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

EXERCICE I

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Pour toute matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| .$$

Q1. Démontrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par :

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

On note S la sphère unité définie par : $S = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|X\|_\infty = 1\right\}$.

Q2. Démontrer que $\forall X \in S,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AX\|_\infty \leq N(A)$.
En déduire, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'existence de $\sup\limits_{X \in S} \|AX\|_\infty$.

On pose alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||\, A \,||| = \sup\limits_{X \in S} \|AX\|_\infty$.

Q3. Démontrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AX\|_\infty \leq |||\, A \,|||\ \|X\|_\infty$.

Q4. Démontrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |||\, A \,||| = N(A)$.

Q5. **Application**. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $|||\, A \,|||$.

EXERCICE II

On définit la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q6. Établir que l'équation $e^{-x}=x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Q7. Démontrer que f possède un unique point critique $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

Q8. À l'aide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0,y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

PROBLÈME

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Démontrer que $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Q10. Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q11. <u>1re tentative</u>
Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $f_n(x)=(-1)^n\, x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q12. 2[e] tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x) \mathrm{d}x.$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q13. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

Q14. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t,$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} \mathrm{d}t.$$

Q15. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q16. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q17. Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q18. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

Q19. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

Q21. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q22. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

Q23. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Q24. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

FIN