MP

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 1

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.
- Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.
- Le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

THÈME

Le sujet fait appel aux théorèmes fondamentaux sur les séries de fonctions, les séries entières et les probabilités.
Il est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.
Le premier exercice permet d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle non borné pour le calcul d'une intégrale.
Le deuxième exercice propose une démonstration afin de retrouver, par deux méthodes, la fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes et d'appliquer ce résultat sur un exemple.
Enfin, le problème permet d'utiliser des théorèmes d'analyse au travers de séries de fonctions, convergence uniforme, séries entières, familles sommables et théorème de la double limite.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES

Le sujet, bien équilibré et progressif, ne comporte aucune difficulté sérieuse et propose des questions accessibles jusqu'à la fin. Le sujet semblait court, mais finalement peu de candidats ont réussi à traiter l'intégralité proprement.
Le thème des séries de fonctions n'est pas facile à maîtriser pour les candidats. Il est amené de façon assez raisonnable en termes de difficulté dans le problème. Les exercices valorisent les candidats qui connaissent bien leur cours.
Le sujet comporte 12 questions et quelques étudiants ont réussi à faire le sujet en entier. C'est un sujet qui a parfaitement rempli son rôle et permis de bien classer les candidats avec un grand écart-type.
La moyenne est de 10,13 et l'écart-type de 4,41.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

Q1. L'intégrabilité est le plus souvent correctement établie, malgré quelques approximations dans les manipulations d'équivalents. Par contre, le théorème d'intégration terme à terme est souvent mal connu. Certains utilisent, à tort, la convergence uniforme pour intervertir somme et intégrale alors que l'on travaille sur un intervalle non borné.

Q2. De nombreux candidats invoquent la linéarité de l'espérance pour la démonstration utilisant la définition ou oublient d'indiquer où l'hypothèse d'indépendance des deux variables aléatoires est utilisée.

Q3. La loi de S_n, a posé des difficultés aux candidats. Question assez peu aboutie.

Q4. L'équivalent et la justification de l'absolue convergence sont en général bien traités. Par contre, les exemples proposés correspondent souvent à des séries entières qui ne sont pas de rayon 1 !

Q5. La majoration n'est pas justifiée et est souvent fausse. Oubli des valeurs absolues. Certains évoquent les rayons de convergence comme si la série était entière.

Q6. La continuité de *f* est bien établie, le fait qu'elle soit C^1 moins bien justifiée avec les bons théorèmes. On rencontre parfois : convergence uniforme sur tout $\left[-b,b\right]$ donc convergence uniforme sur $\left]-1,1\right[$!

Q7. Les candidats reconnaissent une partition de *A* et parviennent en général à prouver la dernière égalité demandée. En revanche peu de candidats savent prouver qu'une famille est sommable et oublient les valeurs absolues.

Q8. Cette question n'a pas posé de problème.

Q9. Plusieurs candidats interprètent « inférieurs à *n* » comme strictement inférieurs à *n*. Certains oublient que 12 est un diviseur de 12. Un candidat a pris en compte les diviseurs positifs et négatifs de 12. Plusieurs candidats ne parvenant pas à retrouver le résultat admis tentent de tromper le correcteur.

Q10. Cette question pourtant classique n'a été que rarement justifiée proprement. De nombreux candidats pensent que la convergence uniforme sur tout segment est suffisante pour l'application du théorème de la double limite. Plusieurs fois le TCSSA est utilisé sur $\left]-1,1\right[$ alors que la série n'est pas alternée pour $x<0$. Beaucoup utilisent la convergence uniforme sur $\left[-b,b\right]$ puis le théorème de la double limite en 1 !

Q11. Souvent, les candidats justifient la convergence uniforme en utilisant $\dfrac{f(x)}{x}$ sur un segment de $\left]-1,1\right[$ comme une conséquence immédiate de Q5 : la division par *x* impose pourtant de reprendre le raisonnement.
D'autres utilisent le TCSSA (la plupart du temps sans vérifier les hypothèses) en se limitant aux $x>0$: ils n'obtiennent ainsi que la limite pour $x \to 0^+$.
La majoration UNIFORME du reste qui découle du théorème des séries alternées dépend souvent de *x* (erreur grave).

Q12. Question peu réussie. Beaucoup de candidats ne justifient pas les hypothèses du théorème de la double limite et assènent le résultat directement.
Peu de candidats ont réussi à montrer la convergence uniforme correctement.

4/ CONCLUSION

Voici quelques conseils pour les futurs candidats (conseils valables autant pour les mathématiques 1 que pour les mathématiques 2).

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.