TSI

CONCOURS COMMUN INP
RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE
MATHÉMATIQUES
Session 2026

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Ce sujet était composé de deux problèmes. Il balayait une grande partie du programme des deux années de TSI.

PROBLÈME 1

Calcul d'une intégrale via les nombres complexes

Ce problème visait à déterminer la valeur exacte d'une intégrale paramétrée en exploitant l'interaction entre l'analyse réelle et l'algèbre complexe. La stratégie débute par l'étude d'un trinôme du second degré, permettant d'isoler une racine spécifique située dans le disque unité. On exprime ensuite la fonction sous deux formes de séries trigonométriques : l'une via les coefficients de Fourier et l'autre par un développement en série entière issu d'une décomposition en éléments simples. En s'appuyant sur la régularité de la fonction pour justifier la convergence absolue des sommes, on applique un théorème admis sur l'unicité des coefficients d'une série nulle. Cette identification permet d'extraire une formule close pour l'intégrale, illustrant comment la comparaison de deux développements en série permet de résoudre un calcul intégral de manière indirecte.

PROBLÈME 2

Matrices aléatoires

Ce problème explore les propriétés algébriques et probabilistes des matrices carrées d'ordre 2 dont les coefficients sont des variables aléatoires discrètes sur un univers fini ou infini.

La **Partie I** établit un cadre géométrique en définissant un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées d'ordre 2. Elle démontre que toute matrice carrée se décompose de manière unique en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Cette propriété est ensuite exploitée pour caractériser la projection orthogonale sur l'ensemble des matrices symétriques et en déduire la distance euclidienne d'une matrice à cet ensemble.

La **Partie II** étudie une matrice aléatoire dont les coefficients suivent une loi de Rademacher. Elle vise à déterminer les lois de probabilité de sa trace et de son déterminant, ainsi qu'à calculer leurs espérances et leurs variances.

La **Partie III** introduit des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique. En utilisant les résultats de distance de la première partie, on analyse la dispersion de la matrice par rapport à la symétrie. L'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de quantifier la probabilité que cette distance s'écarte de sa moyenne.

La **Partie IV** analyse une matrice aléatoire dont les coefficients suivent une loi de Poisson. Le problème se concentre sur l'inversibilité et la diagonalisation. On démontre que la diagonalisabilité dépend de la distinction des coefficients diagonaux. Cette section mêle probabilités, informatique (Python) et analyse (séries entières) pour estimer la probabilité qu'une telle matrice aléatoire soit diagonalisable.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet était équilibré, avec des questions variées, couvrant une grande partie du programme de TSI : manipulations algébriques, étude de la régularité d'une fonction, intégration, nombres complexes, séries entières, séries de Fourier, probabilités et variables aléatoires discrètes, algèbre matricielle, réduction, espaces euclidiens, informatique.

Le sujet était relativement long, mais sa rédaction détaillée permettait aux candidats de valoriser leurs connaissances tout au long de l'épreuve. Son niveau de difficulté restait raisonnable : tout candidat ayant travaillé régulièrement son cours pouvait espérer obtenir une note convenable. De nombreuses questions relevaient directement du cours et constituaient une source importante de points. En revanche, les correcteurs ont constaté que trop de candidats ne maîtrisent pas suffisamment leur cours sur les séries de Fourier.

Pour la partie " probabilités ", les questions de cours plutôt avancées ont été majoritairement traitées correctement, contrairement aux questions plus basiques, souvent mal traitées. En particulier, la formule des probabilités totales (ou autre justification correcte), n'a quasiment jamais été évoquée (**Q34a**, **Q36a**). Les justifications et définitions en probabilités (événements incompatibles, événements indépendants) ont été souvent confondues. Les lois usuelles ne sont pas suffisamment maîtrisées : de nombreux candidats sont incapables de citer les expressions de l'espérance et/ou de la variance associées. Les correcteurs attendaient pourtant non seulement la connaissance de ces résultats, mais également une maîtrise de leur démonstration. Les justifications qui en résultent sont alors floues, absentes ou bien données toutes en même temps. Les correcteurs attendent des candidats qu'ils justifient avec rigueur et précision chacune des étapes de leurs démonstrations.

Les correcteurs ont constaté de fréquentes confusions entre équivalence et implication. Certains candidats confondent le symbole d'équivalence avec le signe d'égalité. Dans l'ensemble, les questions relatives à l'informatique ont été bien traitées voire réussies par une majorité de candidats.

Les copies les plus faibles, caractérisées par un faible nombre de questions abordées, témoignaient généralement d'une connaissance insuffisante du cours du programme TSI. Des lacunes ont notamment été observées sur des notions de base telles que l'expression des coefficients de Fourier, la définition d'un vecteur propre, la définition du rayon de convergence d'une série, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire…

Les copies ont été généralement bien présentées, les résultats mis en valeur et les questions traitées dans l'ordre. Les (rares) candidats récalcitrants ont fait les frais du non-respect des règles élémentaires de rédaction.

3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

PROBLÈME 1 - Calcul d'une intégrale via les nombres complexes

Partie I - Lemme préliminaire

Q1. Beaucoup de candidats calculent le discriminant, dont le signe pose parfois problème, mais ne savent pas exploiter le résultat obtenu.

Q2. Question globalement bien réussie.

Q3. Question très souvent malmenée ou bâclée. Peu de candidats pensent à utiliser l'inégalité triangulaire ou l'utilisent sans la citer. Il est du plus mauvais effet d'affirmer que " il est clair que…". Attention aux inégalités avec des nombres complexes…

Q4. Question rarement traitée correctement. Trop peu de candidats font le lien avec le résultat précédent. Affirmer " d'après la question précédente on a bien le résultat " n'est pas constructif (et ne rapporte aucun point).

Q5. La résolution d'une équation du second degré avec discriminant positif a donné du fil à retordre à bon nombre de candidats. Certains ne simplifient pas racine de 12.

Partie II - Calcul d'une intégrale

Q6. Question régulièrement traitée correctement. Certains candidats écrivent simplement " a différent de 1 ", ce qui ne suffit pas.

Q7. Beaucoup de candidats oublient de justifier que le dénominateur ne s'annule pas. De plus, cet argument ne suffit pas à lui seul à établir la continuité de la fonction. Pour la parité, ne pas oublier de rappeler que le domaine est centré en 0. Beaucoup de candidats écrivent " la fonction cos t ". La quantification est très souvent oubliée.

Q8. Ne pas oublier le coefficient a_0. Les coefficients de Fourier sont trop souvent mal connus.

Q9. Très peu de candidats pensent à justifier la convergence de la série de Fourier vers la fonction avec le théorème de Dirichlet. L'imparité de f est en revanche correctement employée.

Q10. Question régulièrement traitée correctement.

Q11. La première égalité est généralement rapidement démontrée, mais la seconde, lorsqu'elle est abordée, donne régulièrement lieu à des calculs laborieux.

Q12. Il est effarant de constater la très faible réussite à cette question de cours (où la démonstration n'était même pas demandée). Régulièrement, le rayon de convergence ou la somme est exact, mais pas les deux. Certains candidats écrivent " la série est égale à 1/(1-z) ". Il y a trop de confusions entre somme partielle, série ou somme.

Q13. Ne pas oublier de vérifier que la raison de chaque série géométrique est de module strictement inférieur à 1.

Q14. Question peu abordée et peu souvent correctement.

Q15. Question régulièrement bien traitée par les candidats ayant reconnu une série géométrique.

Q16. Question presque toujours abordée avec succès.

Q17.

a) Trop de candidats pensent qu'il est immédiat que la dérivée d'une fonction périodique est elle-même périodique. Mais dans ce cas, pourquoi la primitive d'une fonction périodique (par exemple la fonction constante de valeur 1) n'est pas périodique ?

b) Ne pas oublier de vérifier la non-nullité du dénominateur.

c) Bien que non obligatoire, il est conseillé de poser les intégrations par parties. Ceci évite de se tromper (oubli de signe ou de coefficient). La vérification des hypothèses (les fonctions en jeu sont de classe C^1) est très appréciée par les correcteurs.

d) Question régulièrement abordée avec succès par les candidats.

e) Les correcteurs ont constaté pas mal de mélanges entre convergence des séries et convergence des intégrales.

Q18. Ne pas oublier de traiter le cas n = 0.

Q19. Outre l'invocation de la question **Q5**, ne pas oublier de stipuler que a = 2 et n = 0.

PROBLÈME 2 - Matrices aléatoires

Partie I - Généralités sur l'espace vectoriel " $M2(R)$"

Q20. Trop de candidats calculent le produit de A par B (au lieu de celui de A par la transposée de B) et, curieusement, arrivent malgré tout au bon résultat.

Q21. Question bien traitée dans une majorité de copies. Certains pour vérifier la " définition " écrivent " on vérifie l'existence ". Les correcteurs attendent une justification rigoureuse, en particulier pour la propriété de définition positive du produit scalaire.

Q22. Une matrice M est antisymétrique lorsqu'elle est égale à l'opposé de sa transposée. Trop de candidats pensent qu'une matrice est antisymétrique lorsqu'elle n'est pas égale à sa transposée. Certains candidats écrivent " A est une symétrie " à la place de " la matrice A est symétrique ".

Q23. Une majorité de candidats prouve l'existence ou l'unicité de la décomposition, mais pas les deux.

Q24. Quand le résultat est donné, une démonstration rigoureuse est attendue. Une part importante des candidats l'a admis sans justification, alors qu'invoquer la projection orthogonale donne le résultat presque immédiatement. Le cours n'est pas assez connu.

Partie II - Matrice de Rademacher

Q25. Question régulièrement bien traitée. Toutefois, certains candidats obtiennent une variance négative sans remettre en question la cohérence, ce qui traduit un manque de recul sur les résultats obtenus.

Q26. Lors de la détermination de la loi de probabilité, il ne faut pas oublier l'indépendance des variables aléatoires initiales. De nombreux candidats traitent correctement l'espérance, mais donnent la variance sans en détailler les calculs.

Q27. Mêmes remarques qu'à la question précédente. En outre, remarquer que Z_1 est également une variable aléatoire de Rademacher peut éviter de refaire les calculs précédents.

Partie III - Matrice géométrique

Q28. Cette question de cours sans démonstration n'a pas toujours été bien traitée.

Q29.

a) Lorsque le résultat est donné dans la question, les candidats manquent trop souvent d'honnêteté intellectuelle.

b) Les candidats ayant traité avec succès les questions **a)** et **Q28** ont pu tripler la mise avec cette question de synthèse.

Q30. L'application du théorème de Bienaymé-Tchebychev était conditionnée à la réussite de la question précédente. L'orthographe du théorème de Bienaymé-Tchebychev est particulièrement malmenée dans les copies.

Q31.

a) Cette question a été assez souvent correctement traitée.

b) Le peu de candidats qui ont abordé cette question, l'ont traité avec succès.

Partie IV - Matrice de Poisson

Q32. Cette question de cours sans démonstration a été peu traitée, ce qui est dommage.

Q33.

a) Ne pas oublier l'indépendance des variables aléatoires. Quelques tentatives malhonnêtes pour arriver à une formule donnée par l'énoncé.

b) Question régulièrement bien traitée.

Q34.

a) Le support de la variable aléatoire est bien justifié, contrairement à la formule de l'énoncé. Attention aux mélanges d'objets, en particulier aux réunions de probabilités ou aux sommes d'événements. Il ne faut pas oublier de citer la formule des probabilités totales en précisant le système complet d'événements utilisé.

b) Les calculs ont rarement abouti.

Q35. a) et b) La grande majorité des candidats ne maîtrise pas la définition de vecteur propre et oublie de justifier la non-nullité d'un vecteur propre.

Q36.

a) La difficulté réside dans la traduction de l'événement sous forme d'une réunion disjointe d'événements (ou de citer la formule des probabilités totales et le système complet d'événements utilisé). L'utilisation de l'indépendance des variables aléatoires est indispensable pour garantir la rigueur du raisonnement.

b) De nombreux candidats traitent la condition nécessaire ou la condition suffisante, mais pas les deux.

c) Question correctement traitée par les candidats l'ayant abordée.

Q37.

a) De nombreux candidats ont abordé cette question et y ont répondu avec succès. L'enseignement du langage Python commence à porter ses fruits.

b) Il faut citer la formule de Taylor avec reste intégral, ainsi que ses hypothèses, puis les vérifier. Question très peu traitée.

c) à g) Questions peu abordées

h) Les réponses ont trop souvent été confuses et peu précises, même si l'idée était présente.

Q38.

a) Ne pas oublier de citer la règle de d'Alembert. Question globalement bien traitée.

b) et c) Une somme infinie de fonctions continues n'est pas immédiatement continue. Certains candidats affirment que la somme de la série est une fonction polynomiale.

Q39. Question quasiment jamais abordée.

Q40. Question quasiment jamais abordée. Quelques mots d'explication sont attendus.

4/ CONCLUSION

Cette épreuve équilibrée et balayant largement le programme a été correctement réussie par les candidats ayant travaillé régulièrement tout au long des deux années.
Les correcteurs sont satisfaits du respect des règles élémentaires de présentation et de rédaction de l'immense majorité des candidats. Un effort reste néanmoins attendu en matière d'orthographe, de clarté de la rédaction et de rigueur dans les raisonnements.
Les correcteurs n'attendent pas seulement une suite de calculs, mais un texte où apparaissent clairement les enchaînements logiques, où les calculs sont justifiés, et les quantificateurs correctement utilisés. De plus, ils rappellent que le respect des noms propres fait partie de la rigueur scientifique globale.
Lors de la préparation, il est indispensable de maîtriser les résultats fondamentaux, en particulier de bien maîtriser les théorèmes du cours (avec les hypothèses). Certains candidats ont pleinement intégré ces exigences et ont été justement récompensés.