CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire.
On se propose d'étudier le rang d'apparition de la première boule blanche selon différents protocoles de tirages successifs dans l'urne. L'objectif est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule blanche.

Dans les différents protocoles étudiés dans les **parties I**, **II** et **III**, l'expérience s'arrête lorsque l'on obtient une boule blanche pour la première fois. On considère qu'il est possible de ne jamais obtenir de boule blanche et d'effectuer une infinité de tirages.

Pour chaque protocole étudié, on note $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ l'univers probabilisé et X la variable aléatoire réelle définie sur Ω par $X = k$ si on obtient pour la première fois une boule blanche au k^e tirage et $X = 0$ si on n'obtient jamais de boule blanche.
Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n, N_n et E_n les évènements suivants :

- B_n : " on pioche une boule blanche au n^e tirage " ;
- N_n : " on pioche une boule noire au n^e tirage " ;
- E_n : " les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ".

Enfin, on note $u_n = P(E_n)$.

Préliminaires

Dans la question **Q1**, on établit un résultat utile pour les différentes études des protocoles des **parties I**, **II** et **III**.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère qu'on a effectué n tirages successifs dans l'urne selon un protocole non précisé.

a) Justifier que $(X = 1, X = 2, \ldots, X = n, E_n)$ forme un système complet d'évènements.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1 - P(E_n).$$

c) Montrer que $P(X = 0) = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} P(E_n) = 0$.

On pourra utiliser la propriété $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

Partie I - Étude d'un premier protocole

Dans cette partie, on considère le protocole suivant :

- initialement l'urne contient une boule blanche et une boule noire ;
- on pioche une boule dans l'urne. Si la boule est blanche, on arrête le tirage. Sinon, on remet la boule noire dans l'urne et on procède à un nouveau tirage ;
- on recommence jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.

Q2. Montrer que X suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Q3. Que vaut $P(X = 0)$?

Q4. Donner, sans justification, l'espérance et la variance d'une loi géométrique de paramètre p. Calculer l'espérance et la variance de X.

Partie II - Étude d'un deuxième protocole

Dans cette partie, on considère le protocole suivant :

- initialement l'urne contient une boule blanche et une boule noire ;
- on pioche une boule dans l'urne. Si la boule tirée est blanche, on arrête le tirage. Sinon, on remet la boule noire dans l'urne, puis on multiplie par deux le nombre de boules noires présentes dans l'urne après la remise de la boule noire ;
- on réitère l'étape décrite précédemment jusqu'à obtention d'une boule blanche.

Q5. **a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la composition de l'urne juste avant d'effectuer le k-ème tirage.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En exprimant E_n en fonction de certains évènements B_i ou N_i, $i \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$u_n = P(E_n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{1 + 2^i}\,.$$

Q6. **a)** Étudier la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrer que (u_n) est bornée, puis qu'elle converge vers un réel ℓ. Préciser un encadrement de ℓ.

c) **i)** Donner un équivalent de $\ln(1 + x)$ en 0.

ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = -\ln(u_n)$. Identifier v_n comme la somme partielle d'une série numérique à préciser. À l'aide de la question **Q6.c).i)**, montrer la convergence de la suite (v_n).

iii) On rappelle que $\ell = \lim u_n$. Déduire de **Q6.c).ii)** que $\ell \neq 0$.

Q7. À l'aide du préliminaire, montrer que $P(X = 0) \neq 0$. Interpréter ce résultat.

Partie III - Étude d'un troisième protocole

Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on considère le protocole suivant :

- initialement l'urne contient une boule blanche et une boule noire ;
- on pioche une boule dans l'urne. Si la boule tirée est blanche, on arrête le tirage. Sinon, on remet la boule noire dans l'urne et on ajoute c boules noires dans l'urne ;
- on réitère l'étape décrite précédemment jusqu'à obtention d'une boule blanche.

Q8. Montrer que $P(X=3) = \dfrac{1}{4(2+c)}$.

Q9. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+kc}{2+kc}$.

Q10. On suppose dans cette question que $c = 1$.

a) Expliciter et simplifier $P(E_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b) À l'aide du préliminaire, en déduire la valeur de $P(X=0)$.

c) En remarquant que l'événement $(X=n) = E_{n-1} \cap B_n$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

d) La variable aléatoire X possède t-elle une espérance ?

Q11. On suppose dans cette question que $c = 2$.

a) Montrer qu'alors, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P(E_n) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}\,.$$

b) On admet qu'il existe une constante réelle K telle que $n! \sim K n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.
En déduire un équivalent de $P(E_n)$, puis la limite de $P(E_n)$.

c) À l'aide du préliminaire, conclure sur la valeur de $P(X=0)$.

Q12. Dans cette question, c est un entier naturel non nul quelconque.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = -\ln(P(E_n))$. Démontrer que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{1+kc}\right)$.

b) Étudier la convergence de (S_n). Déterminer alors la valeur de $P(X=0)$.
Ce résultat est-il cohérent avec les réponses obtenues pour les questions **Q10** et **Q11** ?

EXERCICE 2

Partie I - Décomposition en série de Fourier, calcul de sommes de séries numériques

Soit l'application f, 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = |x|\,.$$

Q13. Donner l'allure de la représentation graphique de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
La fonction f est-elle paire ? impaire ?

Q14. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) \mathrm{d}x = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2}.$$

b) Calculer les coefficients de la série de Fourier de la fonction f.

Q15. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

Dans la question suivante, on utilise la série de Fourier précédente pour calculer les sommes de trois séries numériques. Il n'est pas demandé d'établir la convergence de ces séries.

Q16. On pose $R = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

a) En utilisant la valeur de la série de Fourier de f en $x = 0$, calculer S.

b) En distinguant dans l'expression de R les termes d'indice pair et les termes d'indice impair, exprimer R en fonction de S et calculer la valeur de R.

c) En distinguant les termes d'indice pair et les termes d'indice impair, exprimer T en fonction de R ou en fonction de R et de S, et montrer que :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie II - Application au calcul d'intégrales

Q17. **a)** Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt} \,\mathrm{d}t$.

b) Sans chercher à la calculer, justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t$.

Q18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \mathrm{e}^{-kt} = \frac{-\mathrm{e}^{-t}}{1 + \mathrm{e}^{-t}} - (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{1 + \mathrm{e}^{-t}}.$$

b) On pose $h_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k}$. En intégrant l'égalité obtenue à la question **Q18.a)** montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h_n(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + (-1)^{n+1} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} \,\mathrm{d}t}{1 + \mathrm{e}^{-t}}.$$

c) Prouver alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) - h_n(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$

d) Montrer que :

$$\left| \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

e) À l'aide des résultats de différentes questions, déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x\,.$$

Q19. En effectuant une intégration par parties et en utilisant **Q18.e)**, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \geq 2$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension égale à n.
On note 0_E le vecteur nul de E et id l'application identité de E.
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
Si f est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Im}\,(f)$ l'ensemble image de f et $\ker(f)$ le noyau de f.
On définit les itérés d'un endomorphisme f par :

$$f^0 = id \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f\,.$$

Partie I - Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$, f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q20. **a)** Déterminer une base de $\ker(f)$.

b) Les sous-espaces vectoriels $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Q21. Déterminer le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q22. On pose $e'_1 = (1, 1, -2)$ et $e'_2 = (2, 1, 0)$. Soit $e'_3 = (a, 0, b)$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur les réels a et b, pour que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) soit une base de E.

b) Déterminer a et b, tels que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de E dans laquelle la matrice de f soit :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Calculer T^2 et T^3.
En déduire les différentes expressions de T^p en fonction de p, pour $p \in \mathbb{N}$.

Q23. Montrer que $E = \ker(f^2) \oplus \mathrm{Im}\,(f^2)$.

Partie II - Suites des noyaux et des images des itérés de f

L'objectif de cette partie est de prouver que pour tout endomorphisme f de E, il existe un entier p vérifiant :

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}\,(f^p) \end{cases}.$$

Q24. On suppose, dans cette question seulement, que f est un endomorphisme bijectif de E.
Que valent les ensembles $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ dans ce cas ?
Donner une valeur de $p \in \mathbb{N}^*$ assurant que $E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}\,(f^p)$.

Dans toute la suite de la **partie II**, f désigne désormais un endomorphisme de E qui n'est pas bijectif.

Q25. Soit $k \in \mathbb{N}$.

a) Soit $u \in \ker(f^k)$. Montrer que $u \in \ker(f^{k+1})$.

b) Soit $v \in \mathrm{Im}\,(f^{k+1})$. Montrer que $v \in \mathrm{Im}\,(f^k)$.

On a donc établi que :

$$\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}\,(f^k).$$

Q26. **a)** Montrer l'équivalence : $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$.
On pourra utiliser la formule du rang et procéder par double implication.

b) Dans cette question, on veut prouver l'équivalence :

$$E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) \iff \ker(f) = \ker(f^2).$$

i) On suppose que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.
Soit $u \in \ker(f^2)$. Justifier l'existence de $(u_0, u_1) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$, tel que $u = u_0 + u_1$.
Montrer alors que $u \in \ker(f)$, puis que $\ker(f) = \ker(f^2)$.

ii) On suppose maintenant que $\ker(f) = \ker(f^2)$.
Déterminer alors $\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$, puis prouver la seconde implication.

iii) Conclure sur la preuve de l'équivalence demandée.

Q27. Soit $k \in \mathbb{N}$, on note $a_k = \dim(\ker(f^k))$. Justifier que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle converge.

La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant une suite d'entiers croissante et majorée, elle est alors constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \; (q \geq p \implies a_q = a_p) .$$

Q28. Montrer alors que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \; \left(q \geq p \implies \ker(f^q) = \ker(f^p)\right) .$$

Q29. En déduire que l'on a, pour l'entier p défini plus haut, l'égalité $E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}\,(f^p)$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1027 – D'après documents fournis