CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$,

on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$ et on note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q1. Quel est le rang de la matrice J ? Diagonaliser la matrice J sans calculer de déterminant. On ne demande pas la matrice de passage.

Q2. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

Q3. Justifier, sans calculs, que le polynôme minimal de la matrice A est : $\pi_A = (X-b)(X-3a-b)$.

Q4. Déterminer les puissances successives de A par deux méthodes différentes :

a) En déterminant le reste dans la division euclidienne de X^n par le polynôme $\pi_A = (X-b)(X-3a-b)$.
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices A et I.
Pour simplifier les calculs, on posera $\lambda = 3a+b$ et on pourra laisser λ dans la réponse.

b) Calculer J^k pour tout entier $k \geq 1$, puis utiliser $A = aJ + bI$.
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices J et I *(sans le signe somme).*

EXERCICE 2

Dans cet exercice n est un entier naturel non nul.

On note $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme de degré $n-1$ à coefficients réels.

On note, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ les n racines n-ièmes de l'unité.

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :
(*) le produit $P(\omega_1)P(\omega_2)...P(\omega_{n-1})$ est un nombre réel.

Q5. Exemple.
Si on note $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, déterminer ce que vaut $1 + j + j^2$.
Choisir un polynôme de votre choix de degré 2 à coefficients réels tous non nuls et tous différents et vérifier le résultat (*).

Q6. On note la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul 1).

Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice J est $\chi_J = X^n - 1$.

Q7. On note $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & . & a_{n-3} & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(les coefficients du polynôme P se trouvent sur la première ligne, puis sur les lignes suivantes avec un « décalage d'une case vers la droite »).
Comparer la matrice A et la matrice $P(J)$ (on ne demande pas le détail des calculs).

Q8. Diagonaliser la matrice J dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on ne demande pas la matrice de passage), puis diagonaliser la matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q9. En déduire le résultat (*).

PROBLÈME

Q10. Question de cours.
Si E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle \ | \ \rangle$ et de sa norme euclidienne associée notée $\| \ \|$, si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, on définit le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E noté $p_F(x)$ ainsi :
$p_F(x)$ est l'unique vecteur de F vérifiant $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

a) Si $(e_0, e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormale de F, démontrer que $p_F(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i$.

b) Démontrer que pour tout vecteur x de E, $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ et que $\sum_{i=0}^{n} \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Q11. Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
On note désormais $F = \mathbb{R}_n[X]$, $I = [0, +\infty[$ et E l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, telles que la fonction $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ soit intégrable sur l'intervalle I.
Justifier que pour f et g dans E, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle I.

Q12. Démontrer que E est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :
$\forall (f,g) \in E^2, \ \langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

Q13. On identifie $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
Ainsi $\langle \ | \ \rangle$, défini sur $\mathbb{R}[X]$, par $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \ \langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\ h_n{}^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right).$$

a) Calculer pour tout entier naturel $p \leq n$, $h_n{}^{(p)}(x)$.

Si $p < n$, que vaut $h_n{}^{(p)}(0)$?

b) Démontrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$, préciser son degré et son coefficient dominant.

Q15. Soit g élément de $\mathbb{R}[X]$, exprimer $\left\langle g \middle| h_n{}^{(n)} \right\rangle$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) \mathrm{d}t$, puis exprimer $\langle g | L_n \rangle$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.

Q16. Si L_i et L_j, avec $i < j$, sont deux éléments de F, déterminer $\langle L_i | L_j \rangle$.

Q17. Calculer par des intégrations par parties, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\langle L_n | L_n \rangle$.

Q18. Que peut-on en conclure concernant la base $(L_0, L_1, L_2, ..., L_n)$ de vecteurs de F ?
Exprimer, pour tout g élément de E, $P_F(g)$ dans cette base.

Q19. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$ converge et majorer $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2$.

Q20. Pour $\alpha > \frac{-1}{2}$, on pose $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$.

Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $g_\alpha \in E$.

Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1034 – D'après documents fournis