



TSI

CONCOURS COMMUN INP RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE MATHÉMATIQUES Session 2025

1/PRÉSENTATION DU SUJET

PROBLÈME

Le problème propose d'étudier l'action d'un opérateur s'échangeant les coefficients d'un polynôme. Il combine des notions d'algèbre et de probabilités, tout en incluant un détour informatique. Sans réelle difficulté technique, il alterne entre des exemples concrets, des cas théoriques élémentaires et des démonstrations générales.

Partie I - Étude d'une application linéaire

Dans cette première partie, il s'agit de montrer quelques propriétés élémentaires de l'application s , en s'appuyant d'abord sur un cas particulier simple.

Partie II - Recherche des racines d'un vecteur propre de s

La deuxième partie est consacrée à l'étude des vecteurs invariants par l'application s (polynômes réciproques ou palindromiques), dont on recherche les racines à l'aide d'une méthode de réduction de degré.

Partie III - Étude d'une variable aléatoire

La dernière partie formalise l'échange aléatoire des coefficients d'un polynôme et étudie la loi du nombre de coïncidences, d'abord par simulation informatique, puis de manière théorique.

EXERCICE

L'exercice, davantage tourné vers l'analyse, consiste à étudier les propriétés des solutions développables en série entière dans un cas particulier d'équation différentielle de Bessel. Il est montré que ces solutions peuvent s'exprimer de différentes manières sous forme d'intégrales à paramètre, permettant d'étudier leur comportement asymptotique ainsi que celui de leur dérivée. Le début de l'étude est relativement classique, tandis que la fin exploite des techniques d'analyse plus fines.

2/REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet s'est avéré équilibré et a permis de balayer un large spectre du programme des deux années de la filière TSI : algèbre linéaire et matricielle, réduction, nombres complexes, équations différentielles, séries entières, intégrales sur un segment et intégrales généralisées, probabilités et informatique.

Un étudiant maîtrisant son cours et les techniques usuelles de démonstration (déterminant, récurrence, dérivation) pouvait aisément tirer son épingle du jeu, tandis que les candidats les plus aguerris avaient la possibilité de se démarquer avec les questions plus exigeantes.

Nous regrettons que trop de candidats trébuchent dès la première question et ne comprennent pas réellement le comportement de l'application s . Nous invitons vivement les candidats à consacrer quelques minutes à lire l'ensemble du sujet, et en particulier les exemples proposés, afin de s'en imprégner, d'en comprendre les objectifs et d'identifier les questions classiques avant de commencer la rédaction. Ce temps de lecture et d'analyse n'est pas perdu, bien au contraire.

Les concepts élémentaires d'algèbre linéaire sont, dans l'ensemble, compris (valeurs propres, sous-espaces propres, réduction), mais ils souffrent de certains manquements difficilement explicables, comme l'oubli de vérifier qu'une famille génératrice constitue bien une base avant d'évoquer la dimension, ou l'omission de certaines hypothèses, pourtant maintes fois rappelées dans le cadre du théorème spectral. Nous comprenons encore moins les très nombreuses difficultés rencontrées par les candidats pour résoudre l'équation du second degré en Q5.c : trop d'erreurs de calcul et trop d'erreurs dans la discussion des cas, alors qu'il s'agit de points élémentaires.

En analyse, si la méthode de recherche des solutions développables en série entière est globalement connue, sa mise en œuvre rigoureuse l'est beaucoup moins : dérivabilité sur l'ouvert, unicité... Nous attendons davantage de rigueur. Nous félicitons néanmoins les candidats ayant su l'expression générale des coefficients. Hélas, un nombre important éprouve de grandes difficultés dans la recherche du rayon de convergence. Il en va de même pour la preuve de la convergence de l'intégrale dans la question 11 : les candidats gagneraient à commencer par identifier précisément où se situe le problème. Enfin, les hypothèses du théorème de changement de variables sont encore insuffisamment maîtrisées, même si leur application est en général correcte.

Les questions relatives aux probabilités se sont révélées particulièrement clivantes : certains candidats se sont autorisés à avancer tout et n'importe quoi dans l'espoir illusoire de gagner quelques points, alors que d'autres ont montré une compréhension fine des lois, de leurs paramètres et de leurs moments. L'entre-deux est resté relativement rare.

Les questions d'informatique ont souvent été abordées, mais rarement avec succès. Les candidats se limitent trop fréquemment à des descriptions sommaires ou à des paraphrases du sujet, sans réelle compréhension du sens global du programme. Trop de formulations sont vagues, imprécises ou vides de sens.

Sur le plan du raisonnement, le principe de récurrence est généralement compris, mais sa mise en œuvre reste souvent approximative : les correcteurs attendent que soit clairement définie la proposition démontrée. Le raisonnement par analyse-synthèse de la Q10. n'est pas toujours bien maîtrisé. Nous attendons des candidats qu'ils définissent précisément les variables utilisées et qu'ils explicitent les quantifications. Trop souvent, des réponses parfois fantaisistes, notamment dans la partie probabilités, sont avancées sans aucune démonstration. Non seulement ces tentatives ne rapportent aucun point, mais elles installent un climat de défiance défavorable au candidat. Ce constat est particulièrement marqué dans les questions où la réponse était donnée.

Pour finir, si certaines copies se distinguent par une présentation soignée et aérée et manifestent un réel souci d'une rédaction claire, elles ne constituent pas la majorité. Beaucoup trop de candidats se permettent de truffier leur copie de nombreuses ratures. Nous insistons sur l'importance de recourir systématiquement à un brouillon. Dans bien des cas, l'orthographe, la grammaire, voire la syntaxe sont défailtantes, tout comme la lisibilité de l'écriture, ce qui nuit gravement à l'intelligibilité des propos. Les correcteurs tiennent compte du soin apporté à la rigueur, à la qualité de la rédaction et à la présentation ; ces éléments ont un impact significatif sur l'appréciation de la copie.

3/REMARQUES SPÉCIFIQUES

PROBLÈME

Partie I - Étude d'une application linéaire

Q1. Trop de candidats ne comprennent pas l'énoncé malgré l'exemple donné, ce qui compromet singulièrement la suite. Certains sont même allés jusqu'à affirmer que cet exemple comportait une erreur et ont livré leur propre interprétation.

Q2. Question classique, mais dont la rédaction est souvent restée superficielle. Les correcteurs attendaient l'introduction explicite des quantificateurs, un minimum de détails sur la manière de traiter la somme, ainsi qu'une justification précise du fait que s est bien à valeurs dans E . Trop fréquemment, les polynômes sont introduits sans désigner leurs coefficients, lesquels apparaissent ensuite mystérieusement dans les calculs. Dans ce type de question particulièrement élémentaire, les correcteurs insistent sur la nécessité d'une rédaction exemplaire. Nous rappelons également que " théorème " est un nom masculin qui s'accorde en genre avec l'adjectif spectral : on écrit " théorème spectral " et non " théorème spectrale ".

Q3. Question élémentaire. Un certain nombre de candidats peinent à justifier la matrice : il convenait de calculer les images des éléments de la base canonique (il suffisait de singulariser le résultat de la Q1.. L'immense majorité des candidats se précipite sur le polynôme caractéristique pour déterminer le spectre, alors qu'il suffisait d'étudier la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres suggérées dans l'énoncé. Dans la plupart des copies, les calculs (simples) sont correctement menés mais les résultats sont donnés sous forme de vecteurs de \mathbb{R}^3 alors qu'on attendait des polynômes. Enfin, seule une infime partie des candidats prend soin de justifier qu'il s'agit effectivement de bases.

Q4. Le cas général suscite davantage de difficultés. Trop de candidats ignorent ce qu'est une symétrie, et a fortiori ses propriétés. Son spectre ne comporte pas nécessairement -1 et 1 . Seule une minorité parvient à démontrer que la famille est libre, parfois de façon astucieuse via l'utilisation d'un déterminant. La plupart des réponses relatives à la dimension sont fantaisistes.

Partie II - Recherche des racines d'un vecteur propre de s

Q5. La première sous-question est, dans l'ensemble, réussie. En revanche, les suivantes se révèlent particulièrement discriminantes. Certains candidats tentent d'initialiser à $k=0$, et très peu identifient la nécessité d'une récurrence double. Sa rédaction est souvent saccagée et la plupart oublie de traiter la question du degré. Enfin, trop peu de candidats savent résoudre correctement l'équation du second degré, pourtant parfaitement élémentaire, de la Q5.c) : on constate trop d'erreurs de calcul et de profondes lacunes dans la gestion des différents cas. Quasiment aucun candidat ne vérifie que les solutions obtenues sont non nulles.

Q6. Les sous-questions a) et b) sont en général correctement traitées ; la c), en revanche, a suscité de nombreuses difficultés calculatoires. Quasiment aucun candidat n'a compris l'intérêt de l'introduction du polynôme Q tilde. La sous-question d) a connu un meilleur succès.

Partie III - Étude d'une variable aléatoire

Q7. L'argumentation et le vocabulaire relatifs à la question de dénombrement ne sont pas véritablement maîtrisés, même si l'écriture des 8 éléments attendus est souvent correcte. En revanche, trop peu de candidats parviennent ensuite à en déduire la loi de Z et a *fortiori* son espérance et sa variance.

Q8. Dans de nombreuses copies, les candidats se contentent de déchiffrer mot à mot le code Python sans en comprendre le sens. C'est précisément cette prise de recul et de compréhension qui était attendue.

Q9. Les lois proposées sont souvent fantaisistes et généralement non justifiées. Certains vont même jusqu'à invoquer la loi de Poisson (alors qu'il est manifeste que le support est fini), voire la loi normale ! Ce genre d'erreur est redoutablement efficace pour se décrédibiliser aux yeux des correcteurs.

La formule des probabilités totales est très rarement appliquée correctement. Nous rappelons que son préalable est la fourniture d'un système complet d'événements. Tous les candidats devraient pourtant être en mesure de calculer la probabilité qu'un dé amène deux fois la même face...

EXERCICE

Q10. La méthode est généralement connue mais sa mise en œuvre reste souvent laborieuse. Trop peu de candidats justifient la dérivabilité de F ou l'égalité des coefficients à l'aide du théorème d'unicité du développement en série entière. Cette question demandait un minimum d'initiative, même si les jalons étaient fournis. Il était apprécié que les candidats conjecturent la bonne expression des coefficients, mais une preuve était attendue, par exemple par récurrence. L'argumentation relative au rayon de convergence a été fort malmenée et la structure de l'ensemble des solutions échappe à la plupart.

Q11. La justification de la convergence de l'intégrale est souvent fautive et très mal rédigée par presque tous les candidats. Certains évoquent le " critère de Riemann " (ou pire " Reiman ", " Rayman "), généralement sans transformation du dénominateur, et ne réalisent pas que c'est en 1 que l'intégrale est généralisée. D'autres, voyant apparaître un cosinus, tentent un encadrement, ce qui révèle une incompréhension profonde des outils nécessaires à l'étude de la convergence d'une intégrale.

Q12. Le changement de variable est souvent correctement trouvé, mais les hypothèses du théorème éponyme sont mal maîtrisées et les calculs sont insuffisamment justifiés, notamment en ce qui concerne la positivité du cosinus sur $[0, \pi/2]$.

Q13. La rédaction de la récurrence est parfois confuse, en particulier sur la gestion de la quantification sur x . De manière générale, la rigueur dans le traitement de ces questions laisse à désirer.

Q14. Cette question est très rarement réussie. Certains candidats pensent s'en sortir par des références approximatives autour de la formule de Taylor-Young, qui est une formule locale, et donc inadaptée au contexte.

Q15. Le calcul de $G(0)$ est très souvent abordé, mais les correcteurs ont été très surpris par le nombre de réponses fausses à une question de niveau terminale. L'intégration par parties, qui demandait davantage d'initiative tout en restant classique, n'a été correctement traitée que dans quelques bonnes copies.

Q16. Cette question, beaucoup plus technique, est rarement abordée ou rarement traitée avec succès.

Q17. Cette question n'a quasiment jamais été traitée.

4/ CONCLUSION

Au risque de reprendre les mêmes remarques que dans nos précédents rapports, nous tenons à rappeler aux candidats que nous n'attendons pas d'eux une virtuosité exceptionnelle. Nous sommes conscients que, sans doute plus qu'ailleurs en filière TSI, les mathématiques sont souvent perçues avant tout comme un simple outil au service des autres disciplines telles que la physique ou les sciences de l'ingénieur. Pourtant, les mathématiques ne se limitent pas à cela : ; elles sont également le siège de l'argumentation dans sa forme la plus pure et de la rigueur scientifique. Ainsi, notre évaluation ne porte pas seulement sur les techniques mais aussi sur l'honnêteté intellectuelle et la qualité argumentative. Or, trop souvent, ces qualités sont pénalisées par une connaissance trop approximative des outils du cours, ou par une présentation et une expression qui manquent de clarté.

Nous encourageons donc les futurs candidats à concentrer leurs efforts sur une maîtrise approfondie des savoirs, et pas uniquement des savoir-faire, qu'il s'agisse des hypothèses des théorèmes ou du vocabulaire, ainsi que sur le soin apporté à la construction d'une argumentation claire et rigoureuse sans oublier la présentation soignée de leur travail. Certains candidats ont pleinement saisi ces exigences et ont été justement récompensés. Nous savons également que les professeurs de CPGE de la filière TSI sont pleinement engagés pour accompagner les futurs ingénieurs vers cet objectif.