ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet se compose d'un problème et d'un exercice tous deux indépendants.
Le problème est constitué de trois parties indépendantes.

Si besoin, le candidat pourra admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans les questions suivantes.

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini par : $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en " inversant l'ordre des coefficients ". Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q = 7X^3 + 2X^2 + 1$, on obtient $s(Q) = X^4 + 2X^2 + 7X$.

Partie I - Étude d'une application linéaire

Q1. Calculer $s(1)$, $s(X^n)$ et $s\left(X^{2n}\right)$.

Q2. Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est un endomorphisme de E.

Q3. Diagonalisation dans le cas où $n = 1$.

a) Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'endomorphisme s dans la base canonique $\left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et justifier, sans calcul, que M est diagonalisable.

b) Montrer que -1 et 1 sont les seules valeurs propres de la matrice M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

c) Déterminer alors une base de E formée de vecteurs propres de s. Préciser la matrice de s dans cette base.

Q4. Étude du cas général.

On ne suppose plus que n est égal à 1. On définit la famille $(A_0, \ldots, A_{2n})$ de polynômes de E par :

$$A_k = \begin{cases} X^{2n-k} + X^k & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ X^n & \text{si } k = n \\ X^k - X^{2n-k} & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}.$$

a) Justifier que s est une symétrie. Que peut-on en déduire pour le spectre de s ?

b) Vérifier que $(A_0, \ldots, A_{2n})$ est une famille de vecteurs propres de s.

c) Montrer que la famille $(A_0, \ldots, A_{2n})$ est libre dans E.

d) En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

Partie II - Recherche des racines d'un vecteur propre de s

Q5. Préliminaires.

On définit la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes par : $R_1 = X$, $R_2 = X^2 - 2$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}.$$

a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant, pour tout nombre complexe x non nul, l'égalité :

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}.$$

c) Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les complexes x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \dfrac{1}{x} = a$. On distinguera trois cas.

Q6. Étude des racines d'un vecteur propre de s.

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0\,;n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.

a) Vérifier que Q est vecteur propre de s et préciser la valeur propre associée.

b) Justifier que 0 n'est pas racine de Q.

c) On définit le polynôme $\widetilde{Q}$ par : $\widetilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k$.

Soit x un complexe non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Exprimer $x^n \widetilde{Q}(y)$ en fonction de $Q(x)$.

En déduire que $Q(x)$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.

Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

d) On suppose dans cette question que n est égal à 3 et que Q est défini par :
$Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$.

i. Vérifier que $\widetilde{Q} = X^3 + X^2 - 12X$.

ii. En déduire les racines de $\widetilde{Q}$ puis celles de Q.

Partie III - Étude d'une variable aléatoire

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1\,;p]\!]$ et par $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

On munit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme ; autrement dit, pour tout polynôme Q de Ω :

$$\mathbb{P}(\{Q\}) = \frac{1}{\text{Card}\,(\Omega)}.$$

On admet que cela revient à choisir de manière équiprobable et indépendante chacun des $2n+1$ coefficients du polynôme Q dans $[\![1\,;p]\!]$.

On rappelle que, si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini par :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k,$$

on définit le polynôme $s(Q)$ par :

$$s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k.$$

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k dans $[\![0\,;2n]\!]$ vérifiant $a_k = a_{2n-k}$.

Par exemple, pour $n = 2$ et $Q = X^4 + 7X^3 + 2X^2 + 5X + 1$, on a :

$$\begin{array}{rcccccc} Q & = & X^4 & +7X^3 & +2X^2 & +5X & +1 \\ s(Q) & = & X^4 & +5X^3 & +2X^2 & +7X & +1 \end{array}$$

- $a_0 = a_{2\times 2-0} = 1$;
- $a_1 = 5 \neq a_{2\times 2-1} = 7$;
- $a_2 = a_2 = 2$;
- $a_3 = 7 \neq a_1 = 5$;
- $a_4 = a_{2\times 2-4} = 1$.

Il y a donc exactement trois indices k (0, 2 et 4) pour lesquels $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors l'application Z qui à tout polynôme Q de Ω associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$, et on admet que Z est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Dans l'exemple précédent, on a $Z(Q) = 3$.

Q7. Description d'un cas simple.

Dans cette question seulement, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.

a) Justifier que Ω est de cardinal 8. Écrire les huit éléments de Ω, puis déterminer la loi de Z.

b) Calculer l'espérance de Z et montrer que sa variance est égale à 1.

Q8. Simulation informatique.

On rappelle que la commande `np.arange(1, n+1)` du module `numpy` renvoie un vecteur contenant les entiers de 1 à n et que la commande `plt.bar(X, Y)` suivie de `plt.show()` affiche un diagramme en bâtons dont les barres sont situées aux abscisses listées dans le vecteur `X` et dont les hauteurs sont données par le vecteur `Y`.

On dispose par ailleurs :

- d'une fonction `aleaQ` qui renvoie un polynôme choisi au hasard et de manière équiprobable dans Ω et dont les différents appels sont indépendants entre eux ;
- d'une fonction `Z` qui prend en argument un polynôme Q et qui renvoie $Z(Q)$.

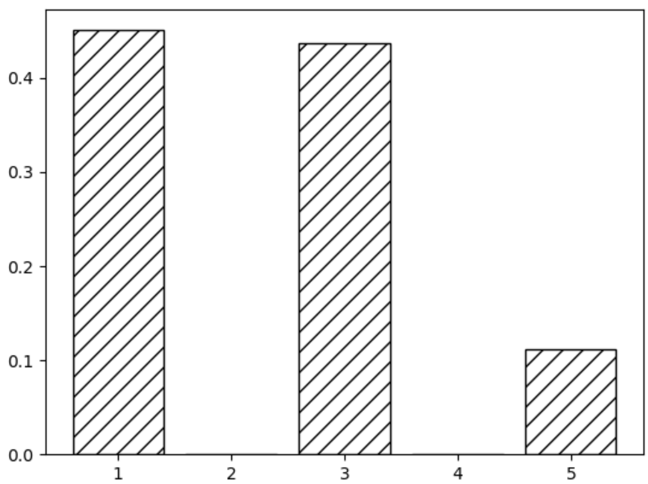
On considère le programme suivant :

```
1  n, p = 2, 3
2  Support = np.arange(1, 2*n+2)
3  
4  N = 10000
5  Obs = np.array([Z(aleaQ()) for _ in range(N)])
6  
7  def tabeff(Obs):
8      eff = np.zeros(len(Support))
9      for i in Support:
10         eff[i-1] = sum(Obs == i)
11     return eff
12 
13 plt.bar(Support, tabeff(Obs)/len(Obs))
14 plt.show()
```

a) Que fait la partie du programme située à la ligne 5 ?

b) Que fait la fonction `tabeff` ? On justifiera précisément et on commentera en particulier la ligne 10.

c) Le programme affiche le diagramme suivant :



Que représente-t-il ?

On justifiera précisément en s'appuyant notamment sur la ligne 13.

Q9. Étude générale de la variable aléatoire Z.

On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier k dans $[\![0\,;2n]\!]$, on définit les variables aléatoires N_k et Z_k de la manière suivante : pour tout polynôme Q de Ω,

- $N_k(Q)$ est le coefficient d'indice k du polynôme Q (noté a_k précédemment) ;
- Z_k vaut 1 si le polynôme présente une coïncidence à l'indice k et vaut zéro sinon, autrement dit : $Z_k(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } N_k(Q) = N_{2n-k}(Q) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Soit $k \in [\![0\,;2n]\!]$. Justifier que N_k suit la loi uniforme sur $[\![1\,;p]\!]$.
Donner son espérance et sa variance.

c) Soit $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. Montrer que $\mathbb{P}(N_k = N_{2n-k}) = \dfrac{1}{p}$.
Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales.

d) En déduire, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, la loi de Z_k, puis reconnaître, en justifiant, celle de $Y = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$.

e) Écrire Z en fonction de Y et de Z_n. En déduire l'espérance et la variance de Z.

EXERCICE

Dans tout l'exercice, on désigne par :

- x une variable réelle ;
- y une fonction de la variable x définie sur une partie de $\mathbb{R}$, y' et y'', si elles existent, les dérivées première et seconde de y.

Le but de cet exercice est d'étudier différentes propriétés d'une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'' + y' + xy = 0.$$

Plus précisément, on s'intéresse à la recherche d'une solution de (E) développable en série entière et on exprime, de deux façons différentes, cette solution sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre.

Q10. Dans cette question, on étudie l'existence d'une solution $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de (E) développable en série entière et on note R son rayon de convergence.

a) On suppose tout d'abord qu'une telle solution existe.

i. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}$.

ii. Justifier que pour tout entier naturel p, $a_{2p+1} = 0$.

iii. Déterminer, pour tout entier naturel p, l'expression de a_{2p} en fonction de p et de a_0.

b) Conclure quant à l'existence d'une solution de (E) développable en série entière et préciser son rayon de convergence.

Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) qui sont développables en série entière ?

Soient g la fonction des deux variables x et θ définie sur $\mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$(x, \theta) \mapsto g(x, \theta) = \cos(x \sin \theta)$$

et h la fonction des deux variables x et t définie sur $\mathbb{R} \times [0\,; 1[$ par :

$$(x, t) \mapsto h(x, t) = \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Q11. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente quel que soit x dans $\mathbb{R}$.

On pose pour x réel :

$$G(x) = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} g(x, \theta)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^1 h(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, F désigne désormais l'unique solution de (E) développable en série entière et vérifiant $F(0) = 1$.

Q12. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $G(x) = H(x)$ pour tout réel x.

Q13. Dérivées successives de G.

a) Soient ω un réel et $\varphi : x \mapsto \cos(\omega x)$. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x, $\varphi^{(n)}(x) = \omega^n \cos\left(\omega x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, la fonction $(x, \theta) \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta)$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$, et donner son expression en fonction de x, θ et de n.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence d'une fonction $M : \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}_+$ continue et d'intégrale convergente sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,\theta)\right| \leqslant M(\theta)$.

On admet dès lors que la fonction G est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$G^{(n)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Q14. Montrer que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra utiliser une formule de Taylor.

Q15. On note respectivement G' et G'' les dérivées première et seconde de G.

a) Calculer $G(0)$.

b) En utilisant l'expression de $G^{(n)}$ fournie dans la question **Q13**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = -x(G''(x) + G(x)).$$

Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

c) Pour tout réel x, exprimer $F(x)$ en fonction de $G(x)$, respectivement de $H(x)$.

Q16. Étude de F en $+\infty$.
On fixe un réel $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \,]0\,;1[$ tel que, quel que soit le réel x :

$$\left|\int_\alpha^1 h(x,t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon/2.$$

b) α étant ainsi choisi, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^\alpha h(x,t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

c) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

On admet que pour tout réel x :

$$H'(x) = \int_0^1 \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Q17. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x)$.

FIN