ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

EXERCICE

Probabilités

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

On note $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n)t^n$ la fonction génératrice de X.

L'objectif de cet exercice est d'affiner une majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à une loi de Poisson.

Q1. Sans démonstration, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Q2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $\mathrm{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda)$.

Q3. Justifier que l'événement $\{X \geqslant 2\lambda\}$ est inclus dans l'événement $\{|X - \lambda| \geqslant \lambda\}$.

Q4. En déduire la majoration suivante :

$$\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{1}$$

Q5. Donner l'ensemble de définition de G_X.

Q6. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Q7. On suppose que $t \geqslant 1$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{P}(X \geqslant \alpha) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$$

Q8. En déduire que :

$$\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda. \tag{2}$$

Q9. On admet que $e \cdot (\ln(4) - 1) \geqslant 1{,}05$. Quelle majoration (1) ou (2) de $\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda)$ est la plus précise ?

PROBLÈME 1

Séries de Fourier

Dans ce problème, on introduit les notions de coefficients de Fourier réels et de série de Fourier d'une fonction réelle continue par morceaux et 2π-périodique. On étudie l'exemple d'une fonction pour laquelle on calcule les coefficients de Fourier réels (**partie I**) et on montre que la fonction coïncide en tout point avec la somme de sa série de Fourier (**partie II**).

Partie I - Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[-\pi; \pi]$ et 2π-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad , \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Les réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier réels de la fonction f.

Q10. Montrer que si f est paire, alors $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2\int_{0}^{\pi} f(t)dt$ et que si f est impaire, alors $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$.

Q11. Soit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]0; \pi]$:

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Montrer qu'il existe une manière unique de définir g sur $\mathbb{R}$ telle que g soit continue par morceaux, impaire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
Déterminer en particulier $g(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de g sur $[-4\pi; 4\pi]$ dans un repère orthogonal.

Q12. Montrer que $a_0(g) = b_0(g) = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(g) = 0$ et $b_n(g) = \frac{1}{n}$.

Partie II - Convergence d'une série de Fourier

On appelle série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, 2π-périodique, la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} U_n(f)$ définie à l'aide des coefficients de Fourier réels de f par :

- $U_0(f)$ est la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{2}a_0(f)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(f) : x \mapsto a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$.

On admet que la série de Fourier de la fonction g définie à la question **Q11** converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on note S_g sa somme.

D'après la question **Q12** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_g(x) = g(x)$.

Q13. Déterminer l'ensemble des $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1]$ tels que $|1 - te^{ix}| = 0$.

Q14. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b < \pi$ et $x \in [a; b]$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $t \in [0; 1]$:

$$|1 - te^{ix}| \geqslant m.$$

Q15. En déduire que pour tout $x \in]0; \pi[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - te^{ix}|} dt = 0.$$

Q16. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in]0; \pi[$ et $t \in [0; 1]$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} t^{n-1} e^{inx} = e^{ix} \frac{1 - t^N e^{iNx}}{1 - te^{ix}}.$$

Q17. En déduire que pour tout $x \in]0; \pi[$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge et que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}.$$

Pour tout $\lambda \in]-1;1[$, on pose $I(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2\lambda t + 1}$.

Q18. Justifier l'existence de $I(\lambda)$ et montrer que :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(\arctan\left(\frac{1-\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) + \arctan\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \right).$$

Q19. En déduire que, pour tout $x \in]0;\pi[$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 - 2t\cos(x) + t^2} = \frac{1}{\sin(x)} \frac{\pi - x}{2}.$$

Q20. Conclure.

PROBLÈME 2

Inégalité et matrices de Hadamard

L'objectif de ce problème est d'établir l'inégalité de Hadamard reliant le déterminant d'une matrice et le produit des normes euclidiennes de ses vecteurs colonnes. Nous étudierons ensuite quelques propriétés de la famille des matrices de Hadamard qui réalisent l'égalité dans cette inégalité.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels.

Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on note $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ le produit scalaire canonique de X et Y.

Étant donné n nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont formés par les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, est désignée par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives à coefficients réels et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives à coefficients réels.

Partie I - Inégalité arithmético-géométrique

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. On pose $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $G = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}$. Dans cette partie, nous allons montrer que $G \leqslant A$, avec égalité si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.
On remarque que dans le cas où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont tous nuls, l'égalité est immédiate. On suppose donc dans la **partie I** que les $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont non tous nuls.

Q21. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 1 + x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Q22. Montrer que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$:

$$\frac{\lambda_i}{A} \leqslant \exp\left(\frac{\lambda_i}{A} - 1\right).$$

Q23. En déduire que $G \leqslant A$.

Q24. Montrer que $G = A$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

Partie II - Inégalité de Hadamard

L'objectif de cette partie est de démontrer que pour toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|\det(M)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Hadamard.

Dans les questions **Q25** à **Q30**, on considère $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Q25. Justifier que S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et rappeler la relation qui lie $\det(S)$ et les valeurs propres de S, puis $\mathrm{Tr}(S)$ et les valeurs propres de S.

Q26. En déduire que :

$$(\det(S))^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(S).$$

Q27. Montrer que $(\det(S))^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(S)$ si et seulement s'il existe $\lambda > 0$, tel que $S = \lambda I_n$.

Q28. Montrer que pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $s_{j,j} > 0$.

On considère la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\sqrt{s_{1,1}}, \dots, \sqrt{s_{n,n}})$.

Q29. Montrer que la matrice $D^{-1} S D^{-1}$ a pour coefficient général $\left(\dfrac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{i,i} s_{j,j}}}\right)$ avec $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$.

En déduire que $D^{-1} S D^{-1}$ est symétrique définie positive et que ses éléments diagonaux valent 1.

Q30. En utilisant la question **Q29**, montrer que :

$$\det(S) \leqslant \prod_{j=1}^{n} s_{j,j}\,,$$

avec égalité si et seulement si S est diagonale.

Q31. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $M^\top M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Q32. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qu'on ne suppose pas inversible. On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de M. Déduire des questions précédentes que l'inégalité (3) est valide pour M, avec égalité si et seulement si les vecteurs colonnes $C_1, \cdots, C_n$ sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Q33. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $|m_{i,j}| \leqslant 1$. Montrer alors que :

$$|\det(M)| \leqslant n^{\frac{n}{2}},$$

avec égalité si et seulement pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $|m_{i,j}| = 1$ et $M^\top M = nI_n$.

Partie III - Matrices de Hadamard

Dans cette partie, nous étudions l'ensemble $\mathcal{H}_n$ des matrices de Hadamard de taille n défini par :

$$\mathcal{H}_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; M^\top M = nI_n \text{ et } \forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2, |m_{i,j}| = 1\right\}.$$

Par exemple, la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{H}_2$.

Notons $H = \{n \in \mathbb{N}^* \;/\; \mathcal{H}_n \neq \emptyset\}$. L'ensemble H n'est pas connu actuellement. L'un des objectifs de cette partie est de donner une condition nécessaire sur n pour que $n \in H$.

On admet que si un ensemble $\mathcal{H}_n$ est non vide, alors il contient au moins une matrice de Hadamard dont la première colonne et la première ligne sont constituées uniquement de 1.

Soit $n \in H$ et soit $M \in \mathcal{H}_n$.

Q34. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}. A-t-on $M^{-1} \in \mathcal{H}_n$?

Q35. Montrer que la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{H}_{2n}$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $2^p \in H$.

On suppose désormais que $n > 2$ et que la première colonne et la première ligne de M ne sont constituées que de 1.

On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice M. On a en particulier $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q36. En considérant $\langle C_1, C_2 \rangle$, montrer que n est pair.

Q37. On note :

$$\begin{aligned} x &= \text{Card}\{i \in [\![1;n]\!], m_{i,2} = 1 \text{ et } m_{i,3} = 1\} ; \\ y &= \text{Card}\{i \in [\![1;n]\!], m_{i,2} = 1 \text{ et } m_{i,3} = -1\} ; \\ z &= \text{Card}\{i \in [\![1;n]\!], m_{i,2} = -1 \text{ et } m_{i,3} = 1\} ; \\ t &= \text{Card}\{i \in [\![1;n]\!], m_{i,2} = -1 \text{ et } m_{i,3} = -1\}. \end{aligned}$$

Exprimer $\langle C_1, C_2 \rangle, \langle C_1, C_3 \rangle$ et $\langle C_2, C_3 \rangle$ en fonction de x, y, z et de t.
En déduire un système linéaire de 4 équations d'inconnues x, y, z, t.

Q38. En déduire que n est un multiple de 4.

Nous venons de démontrer que :
- si n est une puissance de 2, alors n appartient à H ;
- si $n > 2$ et n n'est pas un multiple de 4, alors n n'appartient pas à H.

Hadamard a conjecturé que $n \in H$ si et seulement si n est un multiple de 4.

La question est encore ouverte aujourd'hui.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1056 – D'après documents fournis