PC

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1/ PRESENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices entièrement indépendants. Le premier portait sur l'étude des propriétés d'un endomorphisme défini par multiplication matricielle. Le deuxième introduisait la famille des polynômes de Hilbert, dont plusieurs propriétés étaient ensuite établies. Enfin, le troisième exercice analysait une suite de tirages aléatoires dans une urne dont la composition évoluait au cours du temps.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

2/ COMMENTAIRES GENERAUX SUR LES COPIES

L'ensemble des correcteurs a constaté une augmentation significative de la proportion de copies dont la présentation et le soin ne sont pas satisfaisants : rappelons que ces aspects participent à l'évaluation de la production du candidat. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie particulièrement difficile. Par ailleurs, bien que l'usage d'un effaceur soit interdit, cela n'empêche pas les candidats de corriger proprement leurs erreurs. Il est également recommandé de soigner la mise en page : aérer les réponses, éviter les abréviations et mettre en valeur les résultats afin d'en faciliter la lecture.

En outre, un nombre préoccupant de copies présentent des réponses dénuées d'explications ou de justifications. Une épreuve de mathématiques ne vise pas uniquement à évaluer les compétences calculatoires : elle exige aussi une présentation claire et rigoureuse du raisonnement. Lorsqu'un candidat souhaite invoquer un résultat du cours, il doit le citer explicitement et vérifier attentivement que toutes ses hypothèses sont réunies. De plus, il est important de choisir une présentation structurée (sous forme de liste par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

Par ailleurs, une part importante des candidats utilise implicitement des résultats établis dans les questions précédentes sans les mentionner, ce qui nuit à la clarté de leurs raisonnements. Rappelons que si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en rappelant clairement le numéro de la question concernée. Les candidats doivent également faire attention à introduire correctement les objets et les notations qu'ils utilisent pendant leur raisonnement.

Enfin, de nombreuses questions étaient simplement des questions de cours ou d'application directe de celui-ci. La réussite modérée de ces dernières semble indiquer un manque de travail de fond chez beaucoup de candidats.

3/ REMARQUES DETAILLEES PAR QUESTION

Exercice 1 (Étude d'un endomorphisme matriciel) :

Q1 – Question globalement bien traitée.

Q2 – Il s'agissait de démontrer l'égalité entre deux applications, ce qui a souvent posé des difficultés de rédaction.

Q3 – De nombreux candidats se contentent de montrer l'injectivité ou la surjectivité de l'application linéaire sans expliquer ou justifier pourquoi cela suffit dans le cadre de cette question.

Q4 – Il ne suffit pas d'énoncer la bonne caractérisation : une démonstration rigoureuse est indispensable. Par ailleurs, certains candidats confondent les notions de matrice diagonalisable et de matrice inversible. Il convient de rappeler que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé à racines simples, alors la matrice est diagonalisable, mais la réciproque est fausse.

Q5 – Les réponses à cette question sont souvent fantaisistes, alors que la matrice d'un endomorphisme en dimension finie est une notion centrale du programme.

Q6 – Question généralement bien traitée par les candidats ayant réussi la question précédente.

Q7 – Bien que la réponse donnée soit fréquemment correcte, elle n'est que trop rarement accompagnée d'une justification suffisante.

Q8 – Il ne faut pas bâcler la rédaction de la récurrence. Attention à bien initialiser la récurrence à l'indice k=0.

Q9 – Il s'agissait de démontrer l'égalité entre deux applications, ce qui a souvent posé des difficultés de rédaction.

Q10 – La méconnaissance du cours est rédhibitoire pour répondre à cette question.

Q11 – Même constat que pour la question précédente.

Q12 – Question globalement bien traitée.

Q13 – Beaucoup de candidats qui ont essayé de traiter cette question ont oublié de tenir compte des multiplicités des valeurs propres.

Exercice 2 (Les polynômes de Hermite) :

Q14 – Peu de candidats pensent à mentionner la continuité par morceaux de la fonction intégrée, alors qu'il s'agit de la première chose à faire.

Q15 – En cas d'utilisation des règles de comparaison, on ne peut pas se contenter de faire une étude de la convergence de l'intégrale à une seule de ses deux bornes.

Q16 – La propriété « définie positive » est souvent mal démontrée. Rappelons que si l'intégrale d'une fonction est nulle, il faut mentionner la continuité et la positivité de cette dernière pour en déduire qu'elle est nulle.

Q17 – Beaucoup de candidats tentent d'appliquer maladroitement le théorème de dérivation pour une intégrale à paramètre, alors qu'il s'agissait principalement de mentionner le théorème fondamental de l'intégration.

Q18 – L'hypothèse de domination dans le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre est fréquemment mal vérifiée.

Q19 – Question globalement bien traitée. Cependant, certains candidats divisent par x sans se soucier que cette quantité pourrait être nulle.

Q20 – Le cheminement du raisonnement est souvent correct, mais il manque de rigueur. Par exemple, il faut justifier proprement que v est de limite nulle en l'infini.

Q21 – Il ne faut pas bâcler la rédaction de la récurrence. Attention à bien initialiser la récurrence à l'indice n=0. Il faut justifier soigneusement le raisonnement dans l'hérédité.

Q22 – Il ne faut pas bâcler la rédaction de la récurrence. Attention à bien initialiser la récurrence à l'indice n=0.
Q23 – Question peu abordée.

Q24 – Question traitée de manière satisfaisante par une bonne part des candidats.

Q25 – Une part importante des candidats a su exploiter le résultat de la question 23, mais a commis des erreurs dans le calcul de la dérivée p-ième du polynôme H_p.

Q26 – Question globalement bien traitée. Il est inutile de recourir à des raisonnements complexes pour déterminer les rayons de convergence.

Q27 – Certains candidats ont remplacé z par x-z dans le développement établi précédemment, ce qui ne permet pas d'aboutir.

Q28 – Question peu abordée.

Q29 – Certains candidats écrivent des inégalités entre nombres complexes, ce qui n'a aucun sens. Très peu de candidats ont su gérer correctement les valeurs absolues sur $H_n(x)$ lors de l'étude de la convergence normale de la série de fonctions.

Q30 – Il est indispensable de s'appuyer sur un théorème du cours et d'en vérifier les hypothèses pour pouvoir intervertir l'intégrale et la somme.

Exercice 3 (Succession de tirages dans une urne) :

Q31 – Beaucoup de candidats utilisent des raisonnements inutilement complexes, parfois erronés, pour justifier la décroissance de la suite. Il convient de s'appuyer sur un résultat du cours pour établir la dernière égalité demandée.

Q32 – Question globalement bien traitée.

Q33 – Il est nécessaire de s'appuyer sur un résultat du cours pour obtenir la formule demandée.

Q34 – Se contenter d'indiquer que la série de terme général u_k diverge grossièrement n'est pas suffisant pour prouver le résultat demandé.

Q35 – Pour utiliser les règles de comparaison, il ne faut pas oublier de préciser que les séries considérées sont à termes positifs (ou de signe constant).

Q36 – Il est nécessaire de mentionner que la série est à termes positifs afin de justifier que sa divergence équivaut à ce que sa suite des sommes partielles diverge vers l'infini.

Q37 – Question globalement bien traitée.

Q38 – Beaucoup d'exemples donnés sont corrects, mais encore faut-il en fournir une démonstration rigoureuse.