

1/ THÈME DE L'ÉPREUVE

Ce sujet était constitué de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Le premier exercice proposait de démontrer l'inégalité de Hadamard pour des matrices symétriques définies positives. La preuve reposait sur l'inégalité arithmético-géométrique qu'on démontrait avec un argument de concavité de la fonction logarithme.

Le second exercice proposait l'étude d'un produit scalaire sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On introduisait la famille des polynômes de Tchebychev par une formule de récurrence et on utilisait cette famille pour construire une base orthonormée.

Le problème proposait l'étude générale de la réduction des matrices de rang 1. La première partie donnait un exemple construit à l'aide de variables aléatoires, puis s'intéressait au cas de la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. La seconde partie, plus abstraite, avait pour but d'établir les résultats théoriques.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet était très abordable et sa longueur était très raisonnable ; les thèmes abordés étaient très classiques (polynômes de Tchebychev, matrices de rang 1...) et ont permis aux étudiants avec une bonne préparation et une bonne connaissance du cours d'avoir de bonnes notes. Comme le sujet balayait une large partie du programme et proposait aussi quelques questions difficiles, le sujet a permis de bien classer les candidats, avec une moyenne de 10,28 et un écart-type de 4,55.

La présentation et la qualité de la rédaction sont prises en compte dans le barème. Il est demandé aux candidats de mettre en valeur leurs résultats et de traiter les questions dans l'ordre. Ces consignes ont été globalement bien respectées à part celle de traiter les questions dans l'ordre. Nous insistons donc sur ce point pour les années à venir.

Mis à part ces problèmes et hormis quelques questions, le sujet a été globalement bien compris par les candidats. Une majorité d'entre eux a pu traiter entièrement le sujet.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

EXERCICE 1

- Q1.** Question bien réussie.
- Q2.** La déduction avec la question précédente a posé des difficultés calculatoires aux candidats. Certains ont contourné le problème en utilisant l'inégalité de Jensen.
- Q3.** Question peu réussie. Les tentatives de démonstration par récurrence se sont souvent soldées par un échec et ont donc été une perte de temps.
- Q4.** Question bien réussie.
- Q5.** Question assez bien traitée. Certains candidats ont cru qu'une somme strictement positive n'a que des termes strictement positifs.
- Q6.** Les candidats ont souvent oublié de vérifier que B est symétrique définie positive.

EXERCICE 2

- Q7.** Question classique et très bien réussie.
- Q8.** Quelques erreurs de rédaction dans le raisonnement par récurrence double.
- Q9.** Oubli de vérifier la continuité par morceaux de l'intégrande. Pour l'étude de la convergence, la positivité a été souvent oubliée et beaucoup d'équivalents se sont avérés aberrants.
- Q10.** Le caractère défini a été souvent très mal justifié notamment à cause d'une mauvaise connaissance des propriétés de l'intégrale. Beaucoup de candidats n'ont pas pensé à l'argument du nombre de racines pour justifier la nullité du polynôme.
- Q11.** Très souvent les candidats n'ont pas vu qu'on devait distinguer trois cas pour éviter une division par zéro.
- Q12.** Très souvent les réponses proposées sont incohérentes avec l'énoncé : la famille proposée n'est ni orthogonale ni normée.

PROBLÈME

- Q13.** Le calcul de $\text{rg}(M)$ a demandé aux candidats de longues démonstrations inutiles.
- Q14.** La loi binomiale a été mal justifiée ; les correcteurs attendaient simplement l'explication du fait que X_i et X_i^2 ont une même loi et que les X_i sont indépendantes.
- Q15.** Le cas particulier de la matrice nulle a été très souvent oublié.
- Q16.** Les candidats se sont souvent lancés dans des calculs trop compliqués qui n'ont pas abouti.
- Q17.** Question très classique qu'on peut traiter avec la notion de rang comme le suggérait le sujet. Une majorité de candidats a préféré calculer le polynôme caractéristique mais n'a pas pu conclure à cause d'erreurs de calculs.

- Q18.** Les correcteurs ont souvent vu des matrices non diagonalisables mais pas de rang 1.
- Q19.** Question très mal traitée.
- Q20.** La formule étant donnée dans l'énoncé, certains candidats ont truqué leur calcul pour arriver au résultat demandé. Cela a bien sûr été sanctionné.
- Q21.** Beaucoup d'erreurs sur la notion d'ordre de multiplicité d'une valeur propre et de confusions entre les notions de polynômes minimal et caractéristique.
- Q22.** Avoir un polynôme caractéristique simplement scindé est une condition suffisante de diagonalisabilité mais elle n'est pas nécessaire.
- Q23.** Souvent les candidats ont accumulé les erreurs de raisonnement pour construire coûte que coûte la base demandée.
- Q24.** Question mieux réussie mais la non nullité de a n'a pas toujours été justifiée.
- Q25.** Il n'était pas nécessaire de redémontrer que deux matrices semblables ont même trace.

4/ CONCLUSION

On rappelle à tous les candidats que la rigueur et la clarté des raisonnements et des copies sont des attendus essentiels des concours. Les correcteurs valorisent ainsi, entre autres :

- le soin apporté aux copies ;
- la rigueur des calculs et des raisonnements présentés ;
- la connaissance précise des théorèmes du programme, ainsi que les preuves des points importants.

Les étudiants sont invités à fournir des efforts en ce sens ; un candidat de niveau moyen qui a travaillé doit pouvoir obtenir au moins la moyenne.

Voici quelques conseils pour les futurs candidats :

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles, même si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre. Traiter les questions dans l'ordre de l'énoncé.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation et traiter les questions dans l'ordre du sujet sur sa copie.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.