

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

EXERCICE - Autour de la série harmonique

L'exercice est constitué de deux parties :

- La première est une preuve de la divergence de la série harmonique ainsi que d'une minoration des sommes partielles associées.
- La deuxième est l'étude de variables aléatoires associées à une expérience liée au contenu évolutif d'une urne. La minoration de la première partie permet d'obtenir une estimation liée à cette expérience.

PROBLÈME 1 - Étude de matrices tridiagonales particulières

L'objectif de ce problème est l'étude d'une famille de matrices particulières.

- La partie I concerne l'étude d'un cas particulier dans $M_3(\mathbb{C})$. Celle-ci a pour objectif de familiariser les candidats aux matrices tridiagonales étudiées et de les tester sur des questions de réduction.
- La partie II concerne l'étude du cas général dans $M_2(\mathbb{C})$.
- La partie III est dédiée à l'étude de la suite de Fibonacci (où les candidats sont évalués sur des questions d'Informatique).
- La partie IV traite le cas général lié à la suite de Fibonacci.

PROBLÈME 2 - Calcul d'une borne inférieure

L'objectif de ce problème est le calcul d'une borne inférieure à l'aide de deux méthodes.

- La partie I concerne l'étude d'une suite d'intégrales permettant de tester les candidats sur la notion de série.
- La partie II concerne l'étude d'un produit scalaire où les intégrales de la partie I interviennent. L'idée ici est de voir la borne inférieure cherchée comme une distance (au carré) d'un polynôme à un sous-espace vectoriel.
- La partie III a pour objectif de chercher le couple de réels où la borne inférieure est atteinte, à l'aide d'optimisation et de calcul différentiel.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Erreurs les plus fréquentes

- Faire une démonstration par récurrence pour démontrer une inégalité portant sur une variable réelle.
- Indiquer qu'une suite converge vers 0 donc est équivalente à 0.
- Ce n'est pas une matrice qui peut être " scindé à racines simples " mais son polynôme caractéristique.
- Obtenir un polynôme caractéristique non unitaire (ou ayant clairement le mauvais degré).
- Faire un lien entre la non-nullité du déterminant d'une matrice et sa diagonalisabilité.
- " Trafiquer " ses propres calculs afin d'arriver coûte que coûte à la formule fournie par l'énoncé.
- " En déduire " ne signifie pas que l'on attend un résultat sans démonstration.
- Pour vérifier si une propriété est vraie pour tout entier naturel n , il ne suffit pas de vérifier qu'elle l'est pour $n = 0, 1, 2$.
- Mauvaise initialisation dans le cas d'une récurrence double.
- Faire référence à une question où les hypothèses ne sont pas les mêmes.
- Confondre la suite (u_n) et son terme général u_n .
- Confondre une fonction f et son évaluation $f(x)$. Non, $f(x)$ n'est pas dérivable !
- Confusion entre un sous-espace vectoriel engendré par une famille et une base d'un sous-espace vectoriel.
- Ne pas savoir ce que signifie " scindé " pour un polynôme.
- Les lois usuelles en probabilités ne sont pas connues. La loi de Bernoulli est rarement repérée.
- Le théorème du rang est souvent mal cité (l'espace de départ est rarement le bon).
- Méconnaissance du lien entre le déterminant et polynôme caractéristique.
- Les preuves par récurrence sans propriété claire à démontrer.
- Pour beaucoup de candidats, la récursivité rime avec une complexité très élevée.
- Penser qu'un développement limité en un point (une propriété locale) entraîne un résultat global (une inégalité sur tout un intervalle).

Remarques sur le sujet, le texte et sa compréhension

C'est un sujet équilibré, avec des questions variées, touchant presque toutes les parties du programme. Sa difficulté est progressive et permet à tout étudiant ayant régulièrement appris son cours d'assurer une note convenable.

La partie " probabilités " a été souvent boudée ou maltraitée par les élèves. Les correcteurs ont constaté de multiples affirmations péremptoires (telle variable suit telle loi) et des confusions entre lois et variables aléatoires. Encore plus que dans les autres parties des mathématiques, la précision dans le langage est essentielle !

Les copies sont généralement bien présentées, les résultats mis en valeur et les questions traitées dans l'ordre. Les (rares) candidats récalcitrants ont fait les frais du non-respect des règles élémentaires de rédaction.

3/ RAPPORT DÉTAILLÉ

EXERCICE - Autour de la série harmonique

Q1. Question très peu réussie. Très grosses confusions avec la convergence du terme général.

Q2. Question généralement bien réussie. Attention néanmoins : l'énoncé attendait une condition nécessaire et suffisante (" si et seulement si $\alpha > 1$ ") et pas seulement une condition suffisante

(" si $\alpha > 1$ "). Attention également au fait que la locution " supérieur à " signifie " supérieur ou égal à " : ainsi la condition demandée était " alpha strictement supérieur à 1 ".

Q3. Beaucoup de candidats tentent de démontrer cette inégalité à l'aide d'un développement limité ou d'un développement en série entière. Peu de candidats pensent à étudier une fonction auxiliaire et quand cela est fait, la rigueur n'est pas au rendez-vous.

Q4. La simplification du produit est généralement bien traitée. La minoration de l'exponentielle pose un problème à certains candidats.

Q5. Question plutôt bien traitée. Attention néanmoins à ne pas écrire " $\ln(+\infty)$ ". Rappelons aussi que l'on ne peut pas " passer à la limite " dans une inégalité si on ne sait pas déjà que les termes considérés en ont une.

Q6. Question réussie quand elle a été traitée (une part non négligeable des candidats font l'impasse sur les probabilités). Les correcteurs ont constaté beaucoup trop d'approximations dans le vocabulaire, ce qui nuit à la compréhension des démonstrations.

Q7. Beaucoup de confusions et de tentatives aléatoires (loi de Poisson, un paramètre p qui n'existe pas, etc.).

Q8. La linéarité n'est que rarement citée. Beaucoup trop de démonstrations " magiques ", arrivant comme par hasard à la formule attendue.

Q9. De bonnes idées mais souvent un manque de rigueur.

PROBLÈME 1 - Étude de matrices tridiagonales particulières

Partie I - Un exemple dans $M_3(\mathbb{C})$

Q10. Beaucoup de candidats se contentent de dire que la matrice vérifie les données. Il faut par exemple, mettre en valeur le fait que le produit vaut 1.

Q11. Peu de candidats citent proprement le théorème du rang (et on remarque souvent l'utilisation de M_3 au lieu de $M_3,1$). L'expression " en déduire " ne signifie pas qu'aucune démonstration n'est attendue.

Q12. Très bien traitée dans l'ensemble. Les calculs sont généralement clairs et bien présentés. Les correcteurs ont apprécié les nombreux candidats ayant indiqué les opérations effectuées lors du calcul du déterminant.

Q13. Le déterminant est souvent donné mais pas à l'aide de Q12. Le déterminant n'est pas nécessairement égal à la trace ou à la taille d'une matrice carrée.

Q14. Question généralement très bien traitée, tant sur le plan des calculs que des raisonnements.

Q15. Manque de rigueur : une base est demandée, pas uniquement une famille génératrice.

Q16. Question généralement bien traitée.

Q17. Quasiment aucun candidat ne pense à dire que le conjugué de X est non nul.

Partie II - Cas général dans M2(C)

Q18. Question généralement très bien traitée.

Q19. Question souvent bien traitée. Certains candidats pensent voir une matrice symétrique réelle. D'autres n'ont pas remarqué l'hypothèse $a_1 b_1 = -1$, valable dans toute la partie et traitent de multiples cas inutiles.

Q20. Question souvent bien traitée, comme la précédente. Il est dommage de lire dans certaines copies des affirmations sans aucune justification.

Q21. Question généralement très bien traitée.

Partie III - La suite de Fibonacci

Q22. Une récurrence (double) était attendue ! Une simple vérification de la propriété sur deux ou trois termes ne suffit pas, tout comme une vague explication " avec les mains " .

Q23. L'équation caractéristique et ses solutions sont souvent données mais l'expression du terme général est régulièrement fautive. Il est regrettable de voir que cette question n'est pas bien traitée (car la forme générale des solutions n'est pas connue).

Q24(a). Il est bien précisé de faire un schéma, ce que ne fait pas une partie non négligeable des candidats.

Q24(b). Beaucoup de phrases pour ne pas dire grand-chose. Attention à la rédaction ! Les correcteurs attendent un langage scientifique clair et simple. Il ne faut pas croire que la récursivité est nécessairement d'une complexité élevée.

Q24(c). De bonnes idées quand cette question est traitée. Les copies dont les programmes contenaient les idées principales (cas $n = 0$ et $n = 1$, boucle for, affectations correctes, utilisation de return) ont été valorisées par les correcteurs. Les petites erreurs de programmation (comme le renvoi de $F_{\{n+1\}}$ ou $F_{\{n-1\}}$ au lieu de F_n) n'ont pas été pénalisées.

Partie IV - Calcul du déterminant dans le cas général

Il est à noter que dans cette partie nous revenons au cas général, c'est-à-dire avec des matrices contenant des coefficients a_i et b_i vérifiant $a_i b_i = 1$. Trop de candidats continuent d'utiliser les matrices particulières et les résultats des parties précédentes.

Q25. Généralement bien traitée même si certains candidats utilisent Q26 (ou des cas particuliers étudiés auparavant), ce qui n'a évidemment pas rapporté de points.

Q26. Quelques candidats ne suivent pas l'indication donnée. Une récurrence utilisant la Q27 ne rapporte évidemment pas de points.

Q27. Manque de rigueur pour conclure. Il ne suffit pas de vérifier que $d_n = F_n$ pour $n = 0, 1, 2$ pour conclure ! Écrire que les deux suites ont la même relation de récurrence est évidemment correct mais il faut alors préciser que les premiers termes sont égaux.

PROBLÈME 2 - Calcul d'une borne inférieure

Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

Q28. Très bien traitée.

Q29. Bien traitée dans l'ensemble.

Q30. Bien traitée dans l'ensemble.

Q31. Beaucoup de candidats ont été mis en difficulté par cette question pourtant élémentaire. Il convient au minimum de calculer la différence de deux termes successifs. Rappelons que comparer les deux premiers termes ne suffit pas. Rappelons aussi qu'un quotient d'intégrales n'est pas l'intégrale du quotient...

Q32. Le caractère minoré de la suite n'est généralement pas justifié. Une suite décroissante et positive ne converge pas forcément vers 0. Le fait que $(I_n + I_{n+1})$ converge ne permet pas d'affirmer que (I_n) est convergente (contre-exemple : $I_n = (-1)^n$).

Q33. Question assez peu traitée. L'initialisation est usuellement correcte, mais des problèmes de calcul avec les $(-1)^n$ ont bloqué la fin de nombreuses démonstrations.

Q34. Question peu traitée et peu réussie. Citer le théorème des séries alternées est une bonne idée mais ses hypothèses doivent être proprement écrites. Il est fréquent de lire que (I_n) converge donc la suite $((-1)^n I_n)$ aussi : c'est vrai si la limite de (I_n) est nulle.

Q35. De bonnes idées mais un manque de rigueur.

Partie II - Étude d'un produit scalaire

Q36. Très peu de quantification. L'hypothèse de continuité pour la stricte positivité n'est quasiment jamais donnée. Le fait que P soit nul s'il a une infinité de racines n'est pas cité par les candidats. Attention à ne pas oublier les dx dans les intégrales. Cette question a mis en avant les candidats sachant prouver ce qu'ils annoncent de ceux tâtonnant avec les notions. Lister les attendus sans rien démontrer n'est pas suffisant dans une copie de mathématiques.

Q37. Il n'est pas nécessaire de refaire le calcul de cette intégrale !

Q38. Question peu souvent traitée (bien qu'évidente), ou alors avec des affirmations abracadabrantes (" $X^2 - L(X^2)$ est une droite"). Attention, la formule de la projection parfois utilisée nécessite une base orthonormée : ici, hélas, $(1, X)$ n'est justement pas orthogonale pour le produit scalaire utilisé.

Q39. Question souvent peu traitée. Quelques candidats ont agrémenté leur copie d'un schéma expliquant la projection, ce qui a été valorisé.

Q40. Question rarement traitée.

Partie III - Utilisation d'une fonction de deux variables

Q41. Question bien réussie quand elle a été traitée. L'identité remarquable $(a+b+c)^2$ est à savoir ou à retrouver !

Q42. Du grand n'importe quoi : " l'intégrale est continue/ C^1 donc "... Par ailleurs, les fonctions de plusieurs variables ne sont pas encore maîtrisées par la grande majorité des candidats. Les plus perspicaces utilisant à point nommé la formule de Q41, il ne suffit pas non plus d'affirmer " par opérations usuelles ". En outre " a " et " b " ne sont pas des fonctions... Attention à la rigueur !

Q43. Le début est réussi quand la question est traitée. Il faut tout de même se méfier dans la résolution d'un système : il convient de ne pas diviser par une quantité qui pourrait être nulle.

Q44. Question peu traitée, mais quand elle l'est, les calculs sont régulièrement très corrects.

4/ CONCLUSION

Cette épreuve équilibrée, progressive et balayant largement le programme a été correctement réussie par les candidats ayant travaillé régulièrement toute l'année. Les correcteurs sont satisfaits du respect des règles élémentaires de présentation et de rédaction de certains candidats. Un effort sur l'orthographe, la rédaction et la rigueur est néanmoins attendu.

Les outils usuels restent à consolider. Lors de la préparation, il est indispensable de bien maîtriser les résultats fondamentaux.