

## 1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

## 2/ REMARQUES GÉNÉRALES

### THÈME

Ce sujet proposait deux exercices et un problème.

Le premier exercice demandait aux candidats, en étant guidés, de démontrer la formule du déterminant de Vandermonde. Ensuite, on leur proposait deux applications indépendantes.

Le deuxième exercice permettait de retrouver quelques résultats sur l'exponentielle d'une matrice : définition à l'aide d'une norme d'algèbre, continuité de la somme et, pour finir, la différentiabilité de l'application exponentielle en la matrice nulle.

Le problème, indépendant du deuxième exercice, commençait par la mise en place d'un exemple puis proposait une étude de l'exponentielle d'une matrice symétrique positive.

En deuxième partie, on définissait le produit de Hadamard de deux matrices pour ensuite étudier, pour une matrice symétrique positive, la matrice de terme général l'exponentielle des termes de cette matrice.

Ce sujet utilisait plusieurs notions : déterminants, espace vectoriels normés, réduction de matrices, utilisation de matrices symétriques. Il couvrait ainsi une bonne partie du programme d'algèbre de la classe de MP.

## OBSERVATIONS GÉNÉRALES

Le sujet, accessible, couvrait à la fois les domaines de l'analyse et de l'algèbre.

Les questions ont été comprises. Il y avait peu de copies vides par rapport aux années précédentes.

Une majorité de candidats a pu traiter le sujet dans sa totalité.

La moyenne de 10,12 et l'écart type de 4,29 montrent que le but de trier les candidats est une fois de plus atteint. L'avantage d'un tel sujet abordable est de pouvoir mieux tenir compte de la rigueur et, pour certaines questions, n'attribuer les points que si la réponse est parfaite. Ainsi, on peut constater que peu de candidats ont obtenu la note de 20/20.

Ce type de sujet doit récompenser les candidats qui ont travaillé leur cours et refait des exercices dit « classiques ».

La tenue des copies est en général correcte. Les correcteurs étaient invités à porter une attention toute particulière au soin et à la présentation. Par exemple, une copie dont les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés est sanctionnée. Malheureusement, il existe encore quelques copies peu lisibles. On ne peut qu'insister une nouvelle fois sur le soin que le futur ingénieur doit apporter à son travail.

## 3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

### EXERCICE 1

- Q1.** Bien traitée dans l'ensemble malgré quelques candidats qui se perdent dans des explications sans fin dans la deuxième partie de la question et qui, finalement, n'y répondent pas.  
Trop de candidats ne pensent pas à indiquer que le déterminant est nul si deux colonnes sont égales.
- Q2.** Récurrences assez souvent mal rédigées. Beaucoup tentent de démontrer le résultat avec la forme développée du polynôme.
- Q3.** Assez peu de candidats écrivent correctement la matrice dès le départ, d'autres oublient le  $n!$ .
- Q4.** Beaucoup utilisent l'exemple issu des racines nièmes de l'unité mais trop de candidats se perdent dans des distinctions entre pairs, impairs ou avec des exemples très complexes sans en donner la démonstration.

### EXERCICE 2

- Q5.** Le passage de convergence absolue à convergence simple est souvent non justifié, en particulier on oublie de mentionner « dans un espace vectoriel de dimension finie ».  
Certains confondent convergence absolue et convergence normale.  
On rencontre sur certaines copies un quotient de matrice !

- Q6.** Question peu réussie, les critères de continuité d'une série de fonctions sont mal connus. Cette question a donné lieu à des rédactions farfelues.
- Q7.** Les majorations sont parfois faites sans précautions. La différentiabilité est plutôt bien traitée par les candidats ayant abordé cette dernière partie de la question.

## PROBLÈME

- Q8.** Dans l'ensemble, question bien traitée. Toutefois, le calcul du polynôme caractéristique est parfois laborieux.
- Q9.** Puissance de  $J$  en général bien fait, même si on trouve de très longues réponses. Pour le calcul de  $\exp(A)$ , on rencontre très souvent des erreurs de calcul.
- Q10.** Assez peu de candidats utilisent la dimension finie et la linéarité pour prouver la continuité. Très peu citent l'argument de continuité pour justifier que  $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$ .
- Q11.** Question souvent bien traitée même si certains candidats perdent du temps.
- Q12.** On trouve parfois ' $YDY$ ' comme étant une matrice carrée ou colonne. Pour la réciproque, la nécessité d'utiliser un vecteur propre NON NUL ne semble pas important pour la plupart des candidats.
- Q13.** La deuxième partie de la question nécessitait un contre-exemple. Certains ne justifient pas que les matrices utilisées comme contre-exemple sont bien symétriques positives.
- Q14.** Ici aussi, le caractère orthogonal de la matrice de passage était indispensable pour justifier que la matrice  $R$  obtenue était symétrique.
- Q15.** Difficultés des candidats à manier les sommes avec les indices dans cette question. La vérification est plutôt satisfaisante mais la déduction est très peu traitée. Très peu de bonnes réponses à la deuxième partie de la question.
- Q16.** Question en général bien traitée.
- Q17.** La plupart des candidats qui raisonnent par image réciproque de fermé font comme s'il s'agissait d'une seule application. Ceux qui utilisent le critère séquentiel s'en sortent globalement mieux. La déduction finale est en général bien vue.

## 4/ CONCLUSION

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numérotter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.