CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

EXERCICE 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$.
On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et id l'endomorphisme identité de E.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base $\mathcal{B}_0$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q1. **a)** Déterminer les valeurs propres de f et vérifier que -1 est une valeur propre de f. Peut-on savoir à ce stade si f est diagonalisable ?

b) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de f. *La première coordonnée de chaque vecteur sera prise égale à* 1.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

Q2. On note $(f+id)^2$ l'application composée $(f+id)\circ(f+id)$.

a) Déterminer une base de $\ker\left((f+id)^2\right)$ vérifiant les conditions suivantes :
- la première coordonnée de chaque vecteur de la base est égale à 1 ;
- le premier vecteur de la base appartient à $\ker(f+id)$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker\left((f+id)^2\right) \bigoplus \ker(f-3id)$.

Q3. **a)** Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Préciser la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}'$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En décomposant

$$T = D + N \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

déterminer l'expression de T^n en fonction de n.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Q4. **Application**

On considère les suites réelles $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et pour $n \in \mathbb{N}$, les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 4v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 3v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 4v_n + 2w_n \end{cases}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre X_n, P, T, n et X_0.

b) En déduire qu'il existe trois matrices C, C', C'' de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = (-1)^n(C + nC') + 3^n C''.$$

On ne demande pas de calculer C, C', C'' *ou* P^{-1}.

c) Le résultat précédent montre qu'il existe $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n(\alpha + \beta n) + 3^n \gamma.$$

On donne $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = -1$. Déterminer l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Q5. Questions de cours

a) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$.

b) En déduire les développements en série entière des fonctions $x \longmapsto \ln(1-x)$, puis $x \longmapsto \ln(1+x)$. On précisera les intervalles de convergence et les théorèmes du cours utilisés.

Q6. Calcul d'une somme

Soit φ une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall x \in [0,\ 2\pi[,\ \varphi(x) = x^2$.

a) Donner l'allure de la représentation graphique de φ sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.

b) Le développement en série de Fourier de φ est :

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Montrer que $a_0 = \dfrac{4\pi^2}{3}$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\alpha}{n^2}$.
Déterminer α.
Il n'est pas demandé de calculer les coefficients b_n.

c) Étudier la convergence simple de cette série de Fourier.

d) En choisissant judicieusement une valeur de x, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}.$$

Q7. **a)** Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,1[$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser les coefficients a_n obtenus dans l'écriture $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

On définit la fonction F par :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Q8. **a)** Expliquer pourquoi F est bien définie sur $]-\infty, 1[$ et préciser le lien entre les fonctions f et F.

b) Étudier les variations de F sur $]-\infty, 1[$. *On ne cherchera pas à calculer les limites de F aux bornes de son domaine de définition.*

c) Déterminer le signe de $F(x)$ pour $x \in]-\infty, 1[$.

Q9. Montrer que F est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.

Q10. Montrer que : $\forall x \in]0,1[$, $F(x) = \displaystyle\int_{1-x}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in]0,1[$, on pose :

$$I_n(x) = \int_{1-x}^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t.$$

Q11. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[,\ I_n(x) = \frac{-(1-x)^{n+1}\ln(1-x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Q12. **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^n I_k(x) + \int_{1-x}^1 \frac{t^{n+1}}{1-t}\ln(t)\mathrm{d}t$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $\left|F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^n I_k(x)\right| = \int_0^x \big|f(u)\big|(1-u)^{n+1}\mathrm{d}u$.

On pourra utiliser un changement de variable .

d) Soit $x \in]0,1[$. Expliquer pourquoi la fonction $|f|$ est majorée par une constante M_x sur $[0,x]$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} I_k(x)\right| \leq \frac{M_x}{n+2}.$$

e) Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(x)$.

En déduire que :

$$\forall x \in]0,1[,\ F(x) = \ln(x)\ln(1-x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}.$$

Q13. À l'aide du résultat précédent et des résultats des **Q6** et **Q9**, déterminer β et γ réels tels que :

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \beta\big(\ln(2)\big)^2 + \gamma\,\pi^2.$$

Q14. Calcul de $\lim_{x \to 1^-} F(x)$.

a) Justifier le résultat : $\lim_{x \to 1^-} \ln(x)\ln(1-x) = 0$.

b) Soit $x \in]0,1[$.

En utilisant le résultat $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n^2} \leq (1-x)^n$, montrer que :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} \leq \frac{1-x}{x}.$$

c) En déduire $\lim_{x \to 1^-} F(x)$.

EXERCICE 3

Les **parties A** et **B** sont indépendantes.

Notations

Si $n_1 \leq n_2$, la notation $[\![n_1, n_2]\!]$ désigne l'ensemble des entiers $\{n_1, n_1+1, n_1+2, \ldots, n_2\}$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées $1, 2, \ldots, n$, indiscernables au toucher.

On réalise l'expérience suivante :

- on pioche une boule dans l'urne ;
- on note son numéro, puis on la remet dans l'urne ;
- on recommence *indéfiniment* les deux étapes précédentes.

On admet qu'avec un tel protocole, les différentes tirages sont mutuellement indépendants.

On adopte alors les notations suivantes :

- pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au " nombre de tirages nécessaires pour obtenir k boules distinctes " ;
- pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $Z_k = Y_{k+1} - Y_k$. Par convention $Z_0 = Y_1$.

Par exemple, en prenant $n = 3$, si les boules piochées successivement portent les numéros :

$$2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1 \ldots$$

on aura $Y_1 = 1, Y_2 = 4, Y_3 = 10$ et donc $Z_1 = 1, Z_2 = 3, Z_3 = 6$.

A - Étude du cas particulier n = 2

Dans cette partie seulement, on suppose que $n = 2$; l'urne contient donc deux boules numérotées de 1 à 2.

Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on note D_k l'évènement " au k-ième tirage, on pioche une boule différente de celle du premier tirage ".
Les évènements D_k sont mutuellement indépendants.

Q15. Quelle est la loi de Y_1 ?

Q16. Donner l'univers image de Y_2.

Q17. **a)** Soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Exprimer l'évènement $(Y_2 = m)$ à l'aide d'évènements D_k avec $k \geq 2$.

b) En déduire que :

$$\forall m \in Y_2(\Omega), \; P(Y_2 = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}.$$

c) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Soit $x \in [0, 1[$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2}$.

d) Justifier que Y_2 admet une espérance qui vaut 3.
Montrer que Y_2 admet une variance et calculer sa valeur.

B - Étude du cas général

On suppose dans cette partie que le nombre n de boules dans l'urne est supérieur ou égal à 2. On cherche à déterminer la loi de Z_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Q18. Préciser l'univers image de Z_k et Y_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Q19. Démontrer que :

$$\forall m \geq 1,\ \forall l \geq k,\ P(Z_k = m \,|\, Y_k = l) = \left(\frac{k}{n}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Q20. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que Z_k suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

Q21. Justifier que $E(Z_k) = \dfrac{n}{n-k}$. Donner la variance de Z_k.

Les **Q22** et **Q23** peuvent être traitées en admettant le résultat de la **Q21**.

Q22. Montrer que $Y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$, puis que : $E(Y_n) = n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Q23. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$\forall x \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

c) À l'aide de l'inégalité précédente, établir que :

$$\forall n \geq 1,\quad \frac{1}{n} + \ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n.$$

d) Conclure que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.

e) En déduire un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

FIN