

## 1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

L'épreuve orale de mathématiques de la session 2021 dure une heure et se compose de deux parties de durées égales : une première phase de préparation d'une durée d'une demi-heure et une seconde phase d'interrogation au tableau.

Chaque sujet comporte deux exercices indépendants, portant sur des thèmes distincts du programme de première année ou de deuxième année de TSI. Les exercices proviennent d'une banque commune à l'ensemble des examinateurs. Ils sont conçus pour aborder plusieurs pans du programme. Un des deux exercices est guidé question par question et est rédigé de façon progressive, afin que tout candidat sérieux puisse raisonnablement aborder cet exercice. Le deuxième exercice, plus ouvert et est l'occasion d'une présentation des pistes de recherche, des résultats et des expériences du candidat. Ce deuxième exercice n'est donné qu'après 20 minutes et ne fait l'objet d'aucune préparation du candidat.

Pendant l'oral, l'interrogateur prend des notes à l'aide d'un ordinateur. Cela ne l'empêche aucunement d'être attentif au discours du candidat.

### CALCULATRICE ET PYTHON

La calculatrice personnelle n'est autorisée dans aucun sujet de mathématiques pour cette session. Cette année, chaque premier exercice contenait une question Python. Le candidat a accès à Pyzo durant le temps de préparation. Dans un souci d'aider la préparation des futurs candidats, des exemples de planche sont ajoutés à ce rapport. Ce choix s'appuie sur une volonté d'égalité entre les candidats en termes de matériel numérique. L'accent a été mis sur les connaissances du candidat et aucun calcul demandé n'exigeait une technicité extravagante.

## 2/ REMARQUES GÉNÉRALES

L'évaluation des candidats porte sur leur maîtrise du cours, sur les compétences mathématiques apparaissant dans les programmes de CPGE de première année et de deuxième année, et sur leur capacité de communication.

Concernant les connaissances, les examinateurs sont particulièrement attentifs à la justesse des définitions fondamentales (par exemple : valeur propre, convergence d'une série ou d'une intégrale, définition du noyau, de l'image d'un endomorphisme...) et à la précision des énoncés des théorèmes principaux du cours. Il est bon de rappeler qu'un énoncé de théorème contient des hypothèses et un résultat avec des termes précis.

S'il est important de connaître des méthodes et de développer des automatismes permettant de répondre aux différentes questions posées, l'oral permet de tester systématiquement si ces méthodes reposent sur une compréhension solide des concepts.

Ces dispositions seront reconduites pour la session 2022.

### 3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

#### PYTHON

La question faisant appel à l'outil numérique a été abordée par une majorité de candidats. Les examinateurs se sont abstenus de poser des questions d'ordre technique sur le langage pour privilégier l'intérêt mathématique de l'outil, qu'il s'agisse d'une conjecture, d'un calcul ou de la validation expérimentale d'un aspect de l'exercice. Si un code fonctionnel n'est pas un attendu absolu, il a tout de même permis à certains candidats de soulager des calculs fastidieux, leur permettant de libérer du temps pour traiter des questions moins calculatoires.

Afin d'assurer la lisibilité du code présenté, les candidats doivent prêter attention aux noms des variables et des fonctions introduites. Les identifiants en langue étrangère tels que "up" et "down" sont à proscrire.

Parmi les questions posées figurent les méthodes numériques usuelles de calcul approché d'intégrale, de recherche de racine d'une équation ou de résolution approchée d'une équation différentielle. La méthode d'Euler a été réussie par peu de candidats ; rares sont ceux qui ont été en capacité d'expliquer la méthode.

La majorité des candidats ont produit du code et ont été en capacité d'expliquer leur démarche.

#### ANALYSE

L'étude de la parité d'une fonction commence par la recherche du caractère centré en zéro de son ensemble de définition. Certains candidats après force calculs concluent, qu'une certaine fonction définie sur les réels privés de la valeur 3 n'est pas impaire.

L'hypothèse de continuité a été massivement « oubliée » par les candidats lors de l'application des théorèmes de la bijection ou des valeurs intermédiaires.

Les formules portant sur les coefficients de Fourier n'ont généralement pas posé de difficulté. En revanche, la formule de la moyenne a été ignorée par la plupart des candidats et les hypothèses des théorèmes de Dirichlet et Parseval sont rarement citées correctement.

Certains candidats n'ont aucune connaissance sur les fonctions de plusieurs variables et ignorent jusqu'à l'existence du gradient : voilà qui est pour le moins étonnant de la part d'aspirants ingénieurs. Les notions de point critique ou de plan tangent sont tout aussi malmenées.

Des candidats calculent l'équation caractéristique d'équations différentielles linéaires du second ordre qui n'ont pas de coefficients constants. L'étude de raccord lors de la résolution d'équation différentielle pose de nombreux problèmes.

L'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 pose problème à de nombreux candidats. Le Jury a remarqué une confusion fréquente entre équation différentielle et suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Les développements limités usuels restent parfois méconnus et l'immense majorité des candidats ignore comment justifier qu'une réciproque possède un développement limité.

Concernant les intégrales, il est rappelé aux candidats qu'ils doivent vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés, en particulier le caractère  $C^1$  des fonctions dans les théorèmes de changement de variable et d'intégration par parties.

## GÉOMÉTRIE ET ALGÈBRE

### Géométrie

Il est difficile pour les candidats de donner l'équation d'un plan dans l'espace. L'obtention d'un vecteur normal pose problème. Réaliser un schéma est un attendu tacite de ce genre de question et peut s'avérer une aide précieuse en cas d'hésitation du candidat. Lorsque la réalisation de ce plan est demandée, une incapacité à tracer une figure est révélée.

Bien des candidats ignorent ce qu'est une homothétie qu'elle soit vectorielle ou affine. Il est bon de rappeler que les sujets proposés par le concours portent sur les notions des deux années de préparation.

### Algèbre

Des concepts d'algèbre linéaire ont posé de grandes difficultés. Trop de candidats ne maîtrisent pas les notions de rang, taille, dimension... D'autres confondent diagonalisabilité et inversibilité. Le lien entre inversibilité et spectre semble obscur pour bien des candidats. Nombreux sont ceux qui se rassurent dans l'application mécanique de méthodes souvent lourdes et calculatoires, sans voir des approches plus élégantes et surtout plus rapides. Cela concerne en particulier la réduction des matrices : si le polynôme caractéristique est l'outil privilégié de l'écrasante majorité des candidats, il est généralement inefficace pour diagonaliser une matrice qui est manifestement de rang 1. Le Jury rappelle que dans le cas d'une matrice d'ordre  $n$ , le noyau est alors de dimension  $n - 1$  et non  $n^2 - 1$  comme il l'a vu affirmé plusieurs fois suite à une utilisation fautive du théorème du rang.

Les questions portant sur les projecteurs ont été peu réussies. Peu de candidats connaissent la définition ou une caractérisation des projecteurs.

Démontrer qu'une application est un produit scalaire a parfois posé des difficultés surprenantes. Bien des candidats ont du mal à exhiber une famille orthonormée de deux vecteurs de  $R^3$ , quant au procédé de Gram-Schmidt, s'il est parfois connu de nom, sa mise en œuvre a posé des difficultés. L'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est généralement pas connue.

Le théorème spectral est généralement bien appliqué mais l'argument portant sur le caractère réel des coefficients a été très souvent omis cette année. Attention tout de même à ne pas voir des matrices symétriques partout.

Résoudre un système, même de taille  $2 \times 2$ , peut poser problème.

La formule donnant l'expression d'une projection orthogonale (à l'aide d'une base orthonormée) a été un parent pauvre de cette session.

Les formules trigonométriques simples dont les formules de linéarisation intervenant par exemple dans le calcul des coefficients de Fourier sont connues.

## PROBABILITÉS

Une des plus grandes difficultés relevées est la difficulté de compréhension du texte présenté.

Les connaissances des lois usuelles sont très lacunaires. Les candidats capables d'énoncer les lois avec les paramètres corrects et les formules des espérances et variances ont été récompensés de leur investissement. Certains associent des lois à des situations et restent à cet aspect. Ainsi, la loi de Poisson est connue pour les événements rares et ce fait, semble vouloir servir de justification à son application avec une méconnaissance des valeurs de son espérance ou de sa variance.

Certains candidats très faibles confondent variable aléatoire et loi, et s'étonnent qu'on leur demande dans quel ensemble est pris  $k$  lorsqu'ils écrivent  $P(X=k)$ .

Bien que certains candidats s'attendent à devoir l'appliquer, la formule des probabilités totales n'est en général pas maîtrisée sans parler de la présentation d'un système complet d'événements correct. Elle est parfois énoncée dans un cas général sans pouvoir être appliquée dans le cas de l'exercice et les hypothèses sont trop souvent oubliées.

L'explicitation d'évènements ( $(X=Y)$ ,  $(X \text{ pair})$ ..) semble difficile pour de nombreux candidats.

## ATTITUDE ET PRESTATION DES CANDIDATS

### Gestion du tableau

La gestion du tableau, elle aussi, est appréciée. La présentation doit être claire, ordonnée, et les expressions mathématiques doivent respecter la rigueur du formalisme. Faire ressortir les résultats obtenus au tableau aide à l'avancement dans le problème, certains candidats oublient de réutiliser les questions précédentes lors de la résolution du problème.

Un grand nombre d'étudiants a bien géré le tableau. Certains découpent le tableau en plusieurs parties pour clarifier leur présentation.

### Une épreuve orale

Dans l'ensemble, le Jury est satisfait du déroulement des épreuves orales et constate que la majorité des candidats est bien préparée à cette épreuve. Il salue en particulier la politesse des candidats et leurs efforts de gestion du tableau et de bonne lisibilité. La plupart d'entre eux a également su trouver un bon équilibre entre ce qui est dit et ce qui est écrit.

Le Jury constate cependant une tendance, déjà observée dans le rapport 2019 mais qui tend hélas à s'aggraver, à l'utilisation par les candidats de locutions à la mode. Il s'agit par exemple de « en gros » et plus particulièrement de « du coup » dont la répétition compulsive par un nombre significatif de candidats, est particulièrement agaçante et nuit à la clarté de leur propos. Le Jury attend un usage correct de la langue française et la communication orale est une compétence évaluée par les examinateurs.

Un nombre non négligeable de candidats évoque des résultats au futur (« n sera supérieur à 1 », quand ?) ou au conditionnel (la matrice « serait diagonalisable ») : le Jury doit-il comprendre que le candidat n'est pas sûr de ce qu'il affirme ? Nous rappelons au passage que  $k!$  se lit « factorielle de  $k$  » ou « factorielle  $k$  » et pas «  $k$  factorielle », de même  $\ln(x)$  se dit logarithme népérien de  $x$ .

Quelques candidats font preuve d'une grande passivité. Certains s'arrêtent au moindre écueil et attendent de la part du Jury une aide qui aura une répercussion sur leur note. L'oral est un moment où la capacité à rebondir et à s'engager spontanément dans une recherche est attendue. Cette tendance à la passivité ou à l'attente de l'assentiment du Jury pour chaque proposition est perçue négativement. Certains candidats opèrent même parfois une inversion des rôles en interrogeant l'examineur sur la validité des résultats qu'ils sont censés obtenir. Il s'agit de recruter des ingénieurs avec un esprit critique et d'inventivité. L'oral est un moment d'évaluation et pas un moment de formation académique.

## 4/ CONCLUSION ET CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Lors de la remise du sujet, les examinateurs recommandent de lire une première fois la totalité de l'énoncé. Dans la préparation, il peut être judicieux de réfléchir avant tout calcul, à la stratégie que l'on abordera.

Lors de la présentation orale, les candidats peuvent admettre le résultat de certaines questions. Les examinateurs y reviendront en fin d'exposé si le temps le permet. Par ailleurs, il est inutile d'attendre l'assentiment de l'examineur après chaque question. Les qualités de communication du candidat sont valorisées : clarté de l'expression, dynamisme de la présentation...

Un exposé succinct mais précis des résultats obtenus est attendu. Dans cet esprit, recopier en silence le détail des calculs au tableau est inutile et chronophage. Il convient d'en indiquer les grandes lignes ainsi que le résultat final. L'organisation des calculs est primordiale, que ce soit pour la recherche d'une erreur ou l'appréciation de la prestation du candidat.

Les théorèmes utilisés seront cités et leurs hypothèses vérifiées avec soin. Il pourra aussi être judicieux d'illustrer ses propos par des figures en géométrie, ou des graphes de fonctions, ou un cercle trigonométrique lorsque que l'occasion se présente.

Dans le cas où une question viendrait à poser problème, il est recommandé d'indiquer toutes les pistes explorées, ce qui permettra d'engager un dialogue avec l'examineur. Rappelons à cet égard que les questions (ou les remarques) de l'examineur ont pour but d'aider les candidats à s'interroger sur la pertinence de leurs résultats et à les remettre sur une bonne voie. En aucun cas, les remarques de l'examineur ne visent à déstabiliser le candidat : il s'agit au contraire de le conduire à se poser les bonnes questions. Toutefois, il a été noté que certains candidats refusent de tenir compte des suggestions de l'examineur et s'entêtent dans leurs erreurs ou leurs impasses.

Si bien des candidats manifestent un savoir-faire technique appréciable (manipulation de déterminant, intégration par parties, expression des coefficients de Fourier...), il en va en général tout autrement des hypothèses des théorèmes du cours ou de simples définitions. Le Jury accepte volontiers d'aider un candidat dans la résolution d'une question délicate. Il lui est en revanche beaucoup plus pénible de devoir rappeler à un candidat un résultat de cours qu'il est censé connaître. En tout état de cause, ce type d'aide s'accompagne d'une baisse significative de la note. Les candidats qui se présentent à l'oral doivent maîtriser les outils du cours.

Globalement, les prestations des candidats sont satisfaisantes, tant sur le fond que sur la forme. Les examinateurs félicitent les candidats pour le sérieux de leur travail pendant ces deux ou trois années de préparation et souhaitent bon courage aux futurs candidats.