

1/ PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE ET REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet concernait un générateur inertiel toroïdal qui est un dispositif de récupérateur d'énergie inertiel à induction. Il était composé de trois parties indépendantes. Dans la première partie, il était proposé d'analyser l'amplitude de mouvements lors de la course à pied. La seconde partie abordait la modélisation de la conversion d'énergie mécanique issue des mouvements de balancier des membres du corps en énergie électrique. Enfin, la troisième partie abordait la modélisation du comportement mécanique du générateur.

Le sujet était volontairement assez long, offrant un riche panel de questions de difficultés variées parmi lesquelles chaque candidat a pu faire son choix. Ainsi, si les plus faibles se sont le plus souvent contentés des questions les plus faciles, certains candidats ont traité correctement la quasi totalité des questions ; ce qui a permis un bon étalement des notes.

En mathématique, une large part du programme de TSI des deux années était abordée : nombres complexes, trigonométrie, géométrie élémentaire, probabilités, algèbre linéaire et bilinéaire, étude de fonctions, équivalents, intégrale et intégrale généralisée, fonctions de plusieurs variables, suites et raisonnement par récurrence, permettant ainsi à chacun de s'exprimer.

Le sujet était assez peu calculatoire pour peu que l'on fasse preuve d'efficacité et valorisait significativement les candidats ayant une bonne connaissance du cours. Pour autant, nous rappelons qu'il est demandé aux candidats de commenter et d'argumenter leurs calculs (utilisation de la parité d'une fonction, propriété du déterminant...), surtout lorsque le résultat est donné. Beaucoup parviennent étrangement au résultat demandé avec un point de départ faux, ce qui ne leur profite pas.

Il a été constaté, pour grand nombre de candidats, un niveau de rédaction très insuffisant, particulièrement sur les questions relevant du programme de sciences industrielles de l'ingénieur. Il serait souhaitable que chacune des réponses soit correctement rédigée, c'est-à-dire de façon précise et rigoureuse, sans se limiter à une simple proposition de formule ou à une suite d'égalités mathématiques, et ce afin de donner les détails des raisonnements et ainsi expliquer aux correcteurs ce que le candidat fait ou essaie de faire. Nous recommandons de plus aux candidats de toujours vérifier l'homogénéité puis la cohérence des leurs résultats avant de les encadrer puis de poursuivre leur composition.

À ce stade, il nous semble important de rappeler qu'aucune contradiction dans la réponse à une question ne peut être tolérée, même si le « bon » résultat est noté. De même, aucune locution impérative du type « il y a forcément » ou « on voit bien que » ne saurait être employée dans une composition de sciences ; aussi nous recommandons fortement aux candidats d'utiliser des arguments rationnels.

2/ REMARQUES PARTICULIÈRES

Première partie

- Q1.** Pour cette question, il s'agissait d'identifier sur le tracé des FFT les pics d'amplitudes et la fréquence correspondante. Les correcteurs ont été surpris de constater que nombre de candidats ne savent pas lire un spectre.
- Q2.** Il s'agissait de déterminer la longueur d'une foulée connaissant la vitesse moyenne du coureur et la fréquence des pas déterminée à la question précédente. Beaucoup de candidats se sont malgré tout retrouvés avec une expression du type $d = v t$, ne sachant quoi fixer comme durée t . Pour certains candidats, des longueurs de foulée de plus de 5 m semblent étrangement cohérentes.
- Q3.** Il est absurde de trouver une amplitude négative car il s'agit d'une variation définie positive. Un ordre de grandeur de 1° à 10° près est aussi une réponse absurde.

Deuxième partie

- Q4.** Il s'agissait dans cette question d'expliquer l'origine d'un courant induit à partir du mouvement de translation de la bille considérée comme un dipôle magnétique dans une spire en circuit fermé. Beaucoup de candidats ont oublié le mouvement de translation de la bille pour déterminer le sens du courant, fonction de l'approche ou de l'éloignement de la bille de la spire.
- Q5.** Pour cette question, il s'agissait de calculer, d'après la loi de Faraday, la force électromotrice induite dans le circuit sous l'influence du champ magnétique puis d'en déduire par simple loi d'Ohm le courant induit. La puissance électrique dissipée était alors définie par simple produit. Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas ces notions d'induction pourtant fondamentales. Beaucoup d'erreurs ont aussi été constatées sur la dérivation du flux comme une fonction composée de la coordonnée z , elle-même fonction du temps.
- Q6.** Pour cette question, il s'agissait de traiter la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique. En faisant attention au fait qu'en mécanique c'est la convention générateur qui est utilisée par défaut, il venait immédiatement une expression du coefficient d'amortissement. Peu de candidats ont traité la partie de question visant son optimisation, pourtant centrale dans la conception d'un tel dispositif. Il faut noter que comme la puissance est en $O(1/R_b)$, il est nécessaire de diminuer le rayon d'enroulement de la bobine pour optimiser la conversion d'énergie.
- Q7.** Si la majorité parvient à montrer que $P_e(-z) = P_e(z)$, le fait que l'ensemble de définition soit symétrique par rapport à zéro n'est quasiment jamais mentionné. Le quantificateur sur z est le plus souvent oublié. La conséquence sur les variations est souvent évoquée de façon incorrecte (« la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ») ou trop vague (« les variations sont symétriques »). Que penser de ceux qui concluent à la « périodicité » de P_e ou évoquent des « variations positives » ?
- Q8.** Un nombre important de candidats développe le dénominateur de P_e à l'aide de la formule du binôme. Ces derniers s'enlisent alors inévitablement dans le calcul de la dérivée. Cela laisse songeur quant à leur pratique de la dérivation et à leur manque d'entraînement face à un calcul aussi élémentaire. Ceux qui parviennent à obtenir une expression correcte de la dérivée se contentent la plupart du temps de vérifier qu'elle s'annule en $R_b/2$, valeur fournie dans l'énoncé, et en déduisent la présence d'un extremum : ont-ils entendu parler de la fonction cube ? On attendait une étude convenable des racines (l'immense majorité oublie zéro) et du signe de la dérivée. La plupart de ceux qui l'étudient écrit $z^2 < 4R_b^2 \iff z < \frac{R_b}{2}$ sans prendre la peine de rappeler que z (et R_b) est positif. Un certain nombre de candidats raisonne, à tort, par implication : $P'_e(z) = 0 \implies \dots$
- Q9.** Il convient de rappeler que cette limite n'a aucun rapport avec une quelconque « croissance comparée » qu'un nombre considérable de candidats jettent en pâture, espérant convaincre à bon compte. Une telle limite est de niveau terminale et ne devrait pas poser de problème. Notons qu'un nombre non négligeable de candidats écrit : $P_e(z) \sim \frac{1}{z^8}$, parce que, pensent-ils, « A est négligeable devant z ». Nous avons constaté beaucoup d'écritures incorrectes autour des limites : « $\lim P_e(z) \sim \lim \frac{Az^2}{z^{10}} \gg$ » ou encore « $\lim P_e(z) \sim \frac{Az^2}{z^{10}} \sim \frac{A}{z^8} = 0$ ». Étudier une limite ne consiste pas à écrire une suite plus ou moins justifiée de $\lim \dots = \lim \dots = \dots$, mais à étudier d'abord le comportement de la

fonction (par exemple au travers d'un équivalent) puis à passer à la limite une fois acquis le fait que cette dernière existe.

L'interprétation en termes d'asymptote est rarement rédigée de façon correcte, florilège :

- « la courbe admet une asymptote en $y = 0$ » ou « en 0 » ;
- « la courbe fait une asymptote à l'axe des abscisses en $+\infty$ » ;
- « la courbe admet une tangente horizontale en $+\infty$ » ;
- « la courbe tend vers 0 ».

L'immense majorité (!) des candidats confond tangente et asymptote. Certains concluent même que :

- « la courbe va décroître (quand ?) pour z tendant vers l'infini » ;
- « la courbe va s'amortir » ;
- « la courbe décroît de $R_b/2$ à l'infini » ;
- « ses variations sont uniformes sur l'axe z » ;
- « la courbe ressemblera à une cloche » ;
- « la courbe est une parabole » ;
- « P_e ne varie que positivement ».

Les candidats devraient comprendre que ce genre de formulation installe un climat de défiance qui leur est fort préjudiciable pour l'appréciation du reste de leur production.

Q10. Beaucoup de candidats ignorent la consigne et représentent P_e sur \mathbb{R}_+ . Certains dessinent des pics là où la dérivée s'annule, témoignant ainsi d'une incompréhension profonde de ce que signifie le nombre dérivé.

Q11. Rares sont ceux qui se préoccupent d'identifier préalablement les « impropretés ». Mais une fois que cela a été fait correctement, il est superfétatoire de considérer $\int_0^1 P_e(z) dz$. Beaucoup pensent que le fait que P_e ait une limite nulle en $+\infty$ garantit la convergence. D'autres, plus éclairés, repèrent une intégrale de Riemann, mais combien écrivent sans vergogne que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^8} dz$ est convergente ! Très peu prennent la peine de s'assurer que l'intégrande est positif avant d'utiliser le critère de comparaison. Au final, les fondamentaux de l'étude d'une intégrale impropre ne sont majoritairement pas maîtrisés.

Enfin, nous invitons les futurs candidats à respecter l'orthographe des mathématiciens qui viennent à leur secours. Les théorèmes de Reiman, Ramian ou Ryemann sont sûrement intéressants mais inadaptés ici. On écrit Chasles et non Challe ou Chalsles ou, pire, chale. Nous rappelons également que la relation éponyme n'a rien à faire dans l'étude de cette intégrale.

Q12. La dérivée de la fonction tangente est mal connue et plus encore les hypothèses du théorème de changement de variable dans une intégrale généralisée, quasiment jamais citées correctement. Le calcul des bornes est souvent farfelu : on a vu plus d'une fois $\lim_{u \rightarrow +\infty} \tan(u) = \frac{\pi}{2}$! On n'écrit pas $u(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ pas plus que $u(z \rightarrow +\infty) = \frac{\pi}{2}$. La suite des calculs a été souvent bien menée.

Q13. Un nombre significatif de candidats se tire avec brio de cette question, certes très classique mais qui demandait une certaine dose d'initiative. Certains reconnaissent même les intégrales de Wallis. Très rares en revanche sont ceux qui évoquent le caractère C^1 des fonctions qu'ils considèrent pour l'intégration par parties.

Q14. Le calcul de W_0 n'est pas effectué dans toutes les copies et certains l'obtiennent à l'aide de la formule qu'il s'agit de démontrer ! Certains candidats raisonnent de proche en proche pour obtenir la formule. Si ce type de démarche est utile pour trouver l'expression générale de la suite, c'est un raisonnement par récurrence qui était attendu : la formule était donnée dans l'énoncé. Pour éviter les erreurs dans l'hérédité, les candidats sont invités à écrire la formule au « rang $n + 1$ » pour avoir clairement à l'esprit ce qu'ils doivent démontrer.

Même dans les bonnes copies, l'initialisation de la récurrence n'est pas toujours bien rédigée. Certains écrivent d'emblée $W_0 = \frac{0!}{2^{0+1}(0!)^2} = \dots$: c'est ce qu'il faut prouver ! C'est une faute de logique que l'on retrouve également dans la question suivante.

- Q15.** Question assez souvent abordée. La parité de P_e était un argument clef trop souvent escamoté. Il était prudent de partir du membre de droite pour éviter d'avoir à justifier le découpage d'une intégrale généralisée. Plus d'un part de l'égalité $\mathcal{E}_e^T = 2A(I_4 - R_b^2 I_5)$, que reste-t-il alors à démontrer ?
- Q16.** Question assez souvent bien traitée.
- Q17.** Il s'agissait à cette question de déterminer les positions d'équilibre stable en fonction de l'orientation magnétique (et non de la position de son centre d'inertie). Les correcteurs ont regretté que beaucoup de candidats proposent des positions d'équilibre stable n'étant pas, pour eux, des positions d'équilibre ! Il a été remarqué que beaucoup de candidats ne maîtrisent pas la notion d'équilibre.
- Q18.** Il s'agissait de calculer le couple d'induction par simple produit vectoriel. Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas cette opération vectorielle. La deuxième partie de la question n'a été que très rarement abordée, oubliant souvent que le roulement de la bille sur la paroi allait changer son orientation constamment.

Troisième partie

- Q19.** Cette question assez facile nécessitait simplement de justifier la modélisation du mouvement de balancier des bras par une loi de type sinus. Si la pulsation a été trouvée pour beaucoup, peu de candidats ont proposé une valeur pour l'amplitude. Les correcteurs regrettent l'absence trop souvent remarquée des unités associées aux valeurs numériques des coefficients demandées.
- Q20.** La définition canonique des éléments de réduction d'un champ de rotation n'est pas connue de tous et la formule de changement de point est parfois mal appliquée ou conduit à des résultats erronés à cause d'erreurs de produit vectoriel. Beaucoup de candidats ne respectent pas les notations du sujet et projettent inutilement les éléments de réductions du torseur dans la base B_0 . Les correcteurs regrettent que la notion « d'éléments de réduction » ne soit pas connue de tous les candidats.
- Q21.** La formule de dérivation vectorielle est souvent mal connue ou donnée en opposé. Certains candidats ont dérivé la projection dans la base B_1 pour éviter d'utiliser cette formule. Les correcteurs regrettent d'inadmissibles erreurs de dérivation des fonctions sinus et cosinus. On rappelle enfin qu'en l'absence de base canonique, il est nécessaire de spécifier la base de dérivation d'un vecteur.
- Q22.** Il s'agissait ici de discuter les choix techniques à partir du résultat du calcul de la vitesse de rotation propre de la bille de la question précédente. Une réponse du genre « oui/non le mouvement est adapté » ne peut être acceptée sans justification ! Les correcteurs regrettent que la plupart des candidats ne fasse pas de lien entre le résultat d'un calcul et les dispositions constructives d'un système, ici minimiser R/R_b .
- Q23.** Question peu abordée et rarement convaincante ; beaucoup projettent trop rapidement ou confondent coordonnée et vecteur. Les schémas étaient appréciés pour illustrer le propos mais ne constituent pas une preuve en soi.
- Q24.** La plupart parvient à trouver une matrice jacobienne juste, mais dans plus d'une copie on a vu $\dot{\alpha}$ ou $\dot{\beta}$ dans les deux dernières colonnes de J : on ne dérivait pas par rapport au temps ! Pour mener le calcul de ce déterminant, l'utilisation de la « règle de Sarrus » n'est pas très élégante. La propriété de multilinéarité du déterminant semble peu connue. Il serait souhaitable que les candidats expliquent succinctement le déroulé de leur calcul qui est parfois difficile à suivre, pour ne pas dire douteux. Certains, partant d'une matrice J fautive, essaient de tromper le correcteur et parviennent miraculeusement au bon résultat. Il va sans dire que ce genre d'attitude est lourdement sanctionné, non seulement parce que les correcteurs n'apprécient pas d'être dupés, mais également parce que les écoles du concours CCINP estiment que l'honnêteté intellectuelle est une vertu cardinale de leurs futurs étudiants.
- Q25.** Rarement satisfaisante. Très peu expriment la distance GP à l'aide de ρ et de β . Le fait que $\sin\beta$ soit positif, qui permet de retirer la valeur absolue, est très rarement mentionné.
- Q26.** Souvent bien traitée. Certains candidats, s'écartant de la consigne, obtiennent la formule à l'aide de la trigonométrie. Ils ont été valorisés sans toutefois obtenir la note maximale : il s'agissait de tester leur connaissance des nombres complexes.
- Q27.** On attendait que la formule donnant le volume de la boule soit clairement mentionnée. Beaucoup se contentent d'asséner une expression de m_b , souvent fautive, pour faire « coller » leur calcul au résultat attendu.

- Q28.** Il est malheureux de voir des compositions de vitesses qui ne sont pas des champs de translation sans mention du point où est évaluée la composition. Un point de détail : la vitesse du point G dans le mouvement de 2 par rapport à 1 n'est pas une vitesse d'entraînement mais une vitesse absolue ; par conséquent elle ne doit donc pas être notée avec le symbole appartient (notation par ailleurs non définie dans le sujet).
- Q29.** Il s'agissait à cette question de déterminer le torseur cinétique de la bille et notamment le moment cinétique en son centre d'inertie. Si la formule semble connue des candidats, beaucoup se trompent dans la mise en œuvre du calcul.
- Q30.** Quelques hors sujet avec la détermination des éléments de réduction du torseur dynamique de la bille alors que seul le moment dynamique au point G était demandé. La formule semble connue par la plupart des candidats, même si la base de dérivation est souvent omise.
- Q31.** Le calcul des dérivées partielles de D a posé beaucoup de difficulté. Certains dérivent par rapport à x_i . .
- Q32.** Beaucoup affirment que la matrice est symétrique à coefficients réels mais peu le justifient. Dans de nombreuses copies le « théorème spectrale » est mal orthographié. Le théorème de Schwarz est cité quelques fois mais ses hypothèses, semblant aller de soi, ne sont quasiment jamais vérifiées.
- Q33.** Un raisonnement était attendu dans cette question. Certains, hélas rares, s'en acquittent avec brio, mais un nombre significatif de candidats écrit un cryptique « \hat{H} est la matrice diagonale de H ». Comprenez qui pourra.
- Q34.** Question très rarement traitée.
- Q35.** L'inégalité de Cauchy-Schwarz proposée est souvent fantaisiste et très peu de candidats connaissent la condition d'égalité. Bien des candidats qui abordent la question évoquent la colinéarité de \vec{x}^2 et m_x . Réalisent-ils que ce sont des réels ?
- Q36.** Très peu abordée, quasiment jamais traitée correctement.
- Q37.** Rares sont ceux qui parviennent à calculer les valeurs de \hat{a} et \hat{b} malgré des valeurs numériques particulièrement simples. Les correcteurs s'inquiètent que de futurs ingénieurs puissent écrire $0,6^2 = 0,12$. Certains se contentent de répondre par oui ou non à la question qui était posée concernant la proportionnalité des efforts tangentiel et normal : il est naïf de penser qu'une absence d'argumentation est valorisée.
- Q38.** Il s'agissait d'établir l'analogie statistique de la formule de Koenig-Huygens. Question peu abordée mais parfois bien traitée.
- Q39.** Très peu évoquent le coefficient de corrélation. Il est vrai que le programme de mathématique de TSI se borne à le définir sans préciser de quelle manière l'exploiter.
- Q40.** Il était ici demandé d'appliquer les trois lois de Coulomb pour déterminer le torseur d'action mécanique du bâti sur la bille. Ces lois sont ignorées de la majorité ; la plupart des candidats se contentant de la relation de proportionnalité entre les efforts normaux et tangentiels dans le cas glissant. Les correcteurs regrettent de n'avoir vu aucun calcul de vitesse pour justifier la direction et le sens de l'effort tangentiel.
- Q41.** Il s'agissait à cette question d'élaborer et de mettre en œuvre une démarche de résolution pour déterminer l'effort normal minimal permettant le roulement sans glissement de la bille sur le bâti. Les correcteurs regrettent que la plupart des candidats ayant traité cette question n'énoncent pas clairement ce qu'ils font. Il semble étrange d'appliquer le principe fondamental de la statique à la bille pour étudier son comportement dynamique de roulement sans glissement.
- Q42.** C'est un raisonnement physique qui était attendu dans cette question quasiment jamais traitée de façon satisfaisante.
- Q43.** Il s'agissait d'une simple lecture graphique. Parfois bien traitée mais quasiment aucun candidat n'a vu que les valeurs pouvaient se trouver sans calcul.
- Q44.** Il s'agissait de calculer l'énergie cinétique de la bille. Les correcteurs déplorent de trop nombreuses écritures en référentiel non galiléen, voire même de simples $\frac{1}{2}mv^2$, sans que m et v , n'étant pas des données du sujet, ne soient définies.
- Q45.** Il s'agissait de déterminer une expression d'énergie potentielle de pesanteur ayant fixé une position comme référence de potentiel nul. Cette question a été très mal traitée par les quelques candidats l'ayant abordée.

- Q46.** Il s'agissait de montrer que la puissance dissipée par un roulement sans glissement est nulle. Cette question a été très marginalement traitée.
- Q47.** Il s'agissait de proposer une méthode pour déterminer une équation différentielle, d'anticiper son caractère non linéaire puis de proposer une méthode de résolution numérique. Cette question de cours a été relativement bien traitée par les candidats.

3/ CONCLUSION

L'épreuve de modélisation est probablement l'une des épreuves les plus proches du travail réel de l'ingénieur. Les correcteurs ont conscience de sa difficulté, d'abord parce qu'elle est à la confluence de trois disciplines, mathématique, physique et sciences de l'ingénieur, qu'il est nécessaire de mobiliser simultanément, mais aussi par les incessants allers et retours qu'elle requiert entre la réalité du système physique étudié et l'abstraction des calculs.

Les correcteurs ne s'attendent évidemment pas à ce que tous les candidats abordent les questions difficiles ; ils s'étonnent cependant que nombre de questions faciles, comme celles portant sur l'étude d'une fonction rationnelle, posent autant de difficultés. Nous n'attendons pas de virtuosité de la part des candidats mais déjà une résolution honnête et rigoureuse des questions simples (recherche de limite, étude de la convergence d'une intégrale, calcul d'un déterminant 3×3 , de dérivées partielles. . .). Nous encourageons donc les futurs candidats à concentrer en priorité leurs efforts à la maîtrise des savoirs et savoir-faire fondamentaux, et particulièrement des principaux outils du cours, dont les énoncés et les hypothèses doivent être mieux connus. Il en va de même pour le vocabulaire qui est à la base de toute communication. C'est à partir de ce socle qu'ils peuvent par la suite construire un savoir plus sophistiqué leur permettant de dominer des problématiques plus complexes.

Le soin apporté aux copies est très inégal et les correcteurs déplorent (et sanctionnent) le fait que bien des candidats trouvent normal de consteller leur production d'abondantes ratures voire de « pâtés ». Nous les invitons à faire un meilleur usage des brouillons qui leur sont fournis. De plus, les copies étant numérisées pour la correction, nous recommandons aux candidats d'éviter l'utilisation d'encres trop claires dont le rendu est peu lisible.

Pour finir, nous espérons que ce compte-rendu sera utile aux futurs candidats ainsi qu'à leurs professeurs.