

## 1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

L'épreuve de Mathématiques, d'une durée de quatre heures, consistait en trois problèmes indépendants, abordant les éléments traités durant les deux années de CPGE. Elle mettait en avant les capacités de calcul ainsi que de raisonnement, mais aussi la maîtrise du cours, au travers de l'évaluation de l'ensemble des compétences listées dans les programmes des deux années (beaucoup de questions pouvant être traitées en première année).

Le premier problème proposait d'étudier les séries de Fourier comme une projection mettant en jeu des connaissances en algèbre bilinéaire et d'analyse. Le deuxième problème portait sur l'algèbre linéaire avec une première partie très simple qui devait permettre au candidat de rentrer dans le sujet. Le dernier problème concernait les notions d'analyse des deux années du programme de TSI. De nombreuses réponses aux questions étaient données dans l'énoncé pour mettre l'accent sur l'aspect méthode et la connaissance des théorèmes justifiant les démarches. Ce fut un écueil pour de nombreux candidats qui se sont contentés de paraphraser les questions voire dans certains cas de forcer les calculs en oubliant la lecture scrupuleuse des correcteurs. De nombreux candidats ne portent pas un intérêt assez grand aux questions et à leur enchaînement. Ce penchant à l'automatisme sans une compréhension de la question a pénalisé de nombreux candidats, aussi bien en les égarant qu'en leur faisant perdre du temps. Les questions parfois ne sont pas lues entièrement et les réponses sont ainsi incomplètes. Il a été dénombré un nombre non négligeable de copies avec très peu de résultats inscrits ou même entamés. Il est regrettable qu'une durée de 4 heures ne permette à certains que de présenter 1 à 4 pages de résultats.

De nombreux candidats ont été pénalisés par une connaissance du cours trop approximative. Les questions de restitution ou d'application directe du cours ont été globalement mal traitées.

Les techniques calculatoires usuelles (déterminant, résolution de systèmes linéaires, intégration par parties...) sont globalement connues mais souvent les candidats manquent d'entraînement et de multiples erreurs apparaissent. Quand la formule à prouver est fournie par l'énoncé, des explications et des calculs rigoureux sont requis pour obtenir les points, un discours confus et évasif ne suffit pas.

Proposer une piste de travail est toujours plus bénéfique qu'une question non traitée, écrire une définition connue ou propriété pouvant être utilisée. Cette session a permis de départager de manière claire les étudiants connaissant des résultats de ceux se contentant de citer au hasard des bribes sans prendre connaissance du contexte ou de l'adéquation aux questions.

Une bonne proportion du sujet, de longueur raisonnable, a été abordée par une grande partie des candidats. Aucun problème n'a été délaissé par les candidats : une majorité des candidats a proposé des réponses pour chacun d'entre eux. Une poignée de questions laisse plus de liberté ou utilise des résultats plus fins tout en fournissant aux candidats en difficulté les moyens de poursuivre le traitement du sujet.

La présentation des copies est globalement bonne : résultats encadrés, efforts d'écriture et de rédaction, de clarté et de nombreux candidats essayent d'expliquer leurs raisonnements. On note encore quelques copies pour lesquelles ce soin élémentaire n'est pas apporté : les pages ne sont pas numérotées, la numérotation des questions est rare, parfois pas d'encadrement et les résultats ne se dégagent pas du texte, un texte parfois tout en bloc et sans aucune aération et donc de lecture difficile, ratures, etc. L'orthographe de nombreux mots du langage mathématique courant, ainsi que la grammaire de base (accords masculin/féminin, singulier/pluriel) sont à revoir : un intervalle, la fonction nulle, le théorème spectral, les valeurs propres, un sous-espace vectoriel, un extremum local, etc. Rappelons que ce soin apporté aux copies correspond à une part non négligeable de la note finale.

## 2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

**Q1.** Dès la question 1, il a été noté une méconnaissance des notions les plus élémentaires (par exemple Vect d'une famille de vecteurs). La vérification que  $C_k$  et  $S_k$  sont des espaces vectoriels a rarement été traitée correctement. **De nombreux candidats ont cherché à montrer que  $f_k$  et  $g_k$  sont des applications linéaires. Le cas  $k = 0$  n'a été que très rarement traité.**

**Q2.** La définition de la bilinéarité est souvent confondue avec les linéarités à droite ou à gauche. Certains candidats ont utilisé « le théorème des trois hypothèses » (qui stipule que si  $f$  est continue, positive, et d'intégrale nulle, alors  $f$  est identiquement nulle). Nombreux sont les candidats qui oublient la continuité. Les correcteurs attirent l'attention des candidats sur le fait que les noms utilisés en classe ne sont pas universels. De plus des candidats traduisent positif ou nul par le symbole  $> 0$ .

**Q3.** De nombreux candidats ont calculé la racine carrée de  $(f_k)^2$ , et d'autres oublièrent de conclure et calculaient seulement la norme sans donner les bases orthonormées. Certains ont fait référence au procédé de Gram Schmidt alors qu'il suffisait de normaliser le vecteur.

**Q4. et Q6.** Questions assez peu traitées par manque de connaissance du cours.

**Q7.** La parité a été plutôt bien réussie. Les correcteurs ont été éberlués de croiser un nombre non négligeable de copies où la fonction sinus est considérée comme pi-périodique (par exemple  $\sin(2x+\pi) = \sin(2x)$ ). Beaucoup ne testent que quelques valeurs de  $x$  pour justifier la périodicité.

**Q8.** Peu de candidats ont étudié la fonction sur l'intervalle le plus restreint. Certains ont dérivé la valeur absolue sans que cela ne leur pose problème. De nombreux candidats se sont contentés de tracer la courbe sans étude préliminaire.

**Q9.** Certains candidats confondent la moyenne d'une fonction sur un segment  $[a,b]$  et la moyenne des images en  $a$  et en  $b$ . Quand la formule est connue le calcul n'a pas posé de problème. **Un parallèle avec la physique a été fait ce qui est appréciable dans certaines copies.**

**Q10. et Q11.** Questions plutôt réussies quand elles ont été traitées.

**Q12.** Généralement bien traitée. Certains refont les calculs déjà effectués en Q9, Q11.

**Q13.** La question est globalement peu traitée. Lorsqu'elle l'était, les hypothèses du théorème n'étaient pas souvent énoncées. Nous constatons des confusions entre le théorème de Dirichlet et la formule de Parseval.

**Q14.** Le principal problème réside dans l'oubli du facteur  $1/4$ . Il faut noter que nombreux sont ceux qui confondent l'application linéaire et la matrice associée. Question plutôt bien traitée dans l'ensemble.

**Q15.** Il faut à nouveau noter une méconnaissance du cours, qui devrait permettre de justifier que la matrice est diagonalisable. Le vocabulaire de la réduction est souvent mal utilisé avec des explications du type « Le déterminant est non-nul donc la matrice est diagonalisable », « 1 est valeur propre donc la matrice est diagonalisable ». Les méthodes générales sur la diagonalisation d'une matrice sont à consolider.

**Q16. à Q20.** Certains candidats ne se rendent pas compte que nous sommes revenus au cas général.

**Q16.** Il y a encore beaucoup de confusion entre les notions du type « La trace est non-nulle donc la matrice est inversible », « La matrice est diagonalisable donc inversible », « La matrice est symétrique réelle donc inversible », « Toute matrice carrée est inversible », « La matrice est scindée à racines simples donc inversible ».

**Q17.** Le fait qu'un noyau d'application linéaire est un sous-espace vectoriel est une propriété trop peu connue des candidats.

**Q18.** Confusions entre supplémentaire et complémentaire. L'intersection de sous-espaces vectoriels n'est pas vide. Quand la question est abordée, le candidat a su prouver que la somme est directe.

**Q19.** L'égalité donne une inclusion, mais pas l'égalité. Trop de candidats ont conclu à l'égalité directement.

**Q20.** Des lacunes dans l'application des opérations dans l'espace des endomorphismes.

**Q21.** Question plutôt bien réussie.

**Q22.** Peu de candidats savent reconnaître et expliciter le terme général d'une suite linéaire récurrente d'ordre 2.

**Q23.** Question plutôt réussie quand les candidats ont réussi la question précédente.

**Q24.** Beaucoup de candidats calculent une limite sans plus d'explication, ou alors avec des justifications qui sont très approximatives.

**Q25. à Q27.** De nombreux élèves confondent  $o()$  et équivalent. Les correcteurs soulignent le fait que l'on rencontre encore trop souvent dans les copies le classique : « La fonction est de limite nulle en  $+\infty$ , donc intégrable ».

**Q25.** L'orthographe du nom Riemann est souvent approximative. Par ailleurs, de nombreux candidats pensent que l'intégrale de 0 à l'infini de  $\frac{1}{t^2}$  converge.

**Q26.** De nombreux candidats ont utilisé la relation de Chasles sans autre vérification. Pour les autres, les justifications sont très approximatives.

**Q28.** Beaucoup d'élèves pensent que la primitive de la fonction qui à  $t$  associe  $e^{-t^2}$  est la fonction qui à  $t$  associe  $-\frac{1}{2t} e^{-t^2}$ . Peu de candidats ont pensé à apporter des explications. Quelques phrases auraient pu aider à la compréhension.

**Q29-30.** Trop de candidats utilisent des points de suspensions plutôt que de rédiger proprement une récurrence.

**Q31.** La question a été bien traitée lorsqu'elle a été abordée.

**Q32.** De nombreux candidats ne pensent pas à tester le point indiqué.

**Q33.** De nombreuses erreurs de calculs ont été observées pour cette question pourtant simple.

**Q34.** Les candidats se contentent souvent de donner la réponse sans explication.

**Q35.** Certains candidats utilisent un encadrement du cosinus et le théorème des gendarmes pour conclure. Les autres l'ont plutôt bien traitée.

**Q36.** Question peu réussie qui illustre la méconnaissance du cours des candidats.

**Q39. à 42.** Plutôt réussies quand elles ont été traitées mais beaucoup de candidats se sont arrêtés avant dans le sujet.

### 3/ CONSEILS ET BILAN

Cette épreuve a mis en avant une méconnaissance du cours de la part de nombreux candidats. L'équipe des correcteurs a apprécié les copies bien présentées, où les résultats encadrés apparaissent clairement. Connaître le nom usuel des théorèmes de manière sûre est un plus dans une copie. Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.

Les correcteurs encouragent les candidats des sessions à venir à bien élaborer leur stratégie devant une question, en prenant en compte l'énoncé et la particularité de chaque terme. Ainsi le terme « vérifier » indique une vérification plutôt qu'un recours à une méthode monolithique.

Lorsque le sujet donne une formule à démontrer, le candidat doit chercher à la prouver de façon rigoureuse, et non pas à tordre ses propres calculs faux afin qu'ils cadrent, ni à tenter de justifier la formule à l'aide d'explications obscures. L'honnêteté intellectuelle fait partie des qualités nécessaires à tout ingénieur.