TSI

CONCOURS COMMUN INP - SESSION 2021

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Comme chaque année, les candidats tireront profit de la lecture des précédents rapports qui contiennent des remarques et conseils valables lors de cette session.

Le sujet était composé de trois problèmes indépendants. Le premier concernait l'étude d'une fonction puissance dont on cherche à exprimer l'intégrale sur $[0,1]$ et qui intervenait dans la nature d'un point critique d'une fonction de deux variables. Le deuxième mettait en jeu l'étude d'une série de Fourier afin de calculer une limite intégrale. Enfin, le troisième portait sur l'utilisation de variables de Rademacher dans diverses situations. Le sujet était particulièrement long cette année et de difficulté globalement croissante.

L'ensemble des trois problèmes mobilisait de larges connaissances de cours s'étalant sur les programmes de première ou de deuxième année de classes préparatoires aux grandes écoles. Il est apparu, comme l'année dernière, que le cours est trop souvent mal connu, ce qui a pénalisé un grand nombre de candidats.

De nombreuses lacunes se sont faites particulièrement ressentir sur le programme de première année : le calcul de dérivées, la représentation graphique, l'équation de la tangente, les développements limités et applications, les nombres complexes, le raisonnement par récurrence, la formule des probabilités totales ... Signalons également un défaut de maîtrise des concepts de base d'algèbre linéaire avec les définitions d'éléments propres, les diverses caractérisations de matrices inversibles, les conditions suffisantes de diagonalisation, les méthodes pour trouver une base de l'image, calculer la puissance d'une matrice. La réduction ne se réduit pas à l'étude du polynôme caractéristique. Les différents confinements et cours à distance ont sans doute accentué ces difficultés.

Les correcteurs tiennent à souligner l'effort de présentation des copies pour le plus grand nombre : les résultats sont souvent mis en valeur et les copies pour la plupart sont correctement lisibles. Quelques candidats traitent les questions totalement dans le désordre effectuant des va-et-vient entre le début et la fin d'un problème, ce qui n'est ni agréable pour le correcteur ni profitable pour le candidat quand on sait que les questions s'enchaînent pour en faciliter leur résolution.

Cependant il serait appréciable de voir des références explicites aux questions précédentes quand elles sont utilisées, de voir le nom des théorèmes et formules employées : théorème d'intégration terme à terme, formule d'Euler, formule d'intégration par parties, croissances comparées… À ce sujet, les abréviations comme IPP ou FPT n'ont pas leur place dans une copie correctement rédigée si elles n'ont pas été définies auparavant.

Il peut être utile de rappeler que se contenter d'affirmer un résultat donné dans l'énoncé sans y ajouter la moindre justification n'apporte aucun point et ne donne pas une bonne impression générale sur l'ensemble de la copie. L'utilisation des symboles d'équivalence et d'implication est fortement déconseillée, vu l'emploi qui leur est réservé. Enfin, les correcteurs apprécieraient davantage de soin porté sur l'orthographe et les différents accords grammaticaux.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

Problème I.

Q1. Cette question n'a en général pas posé problème. L'expression « composée de fonctions » était attendue. Des candidats se contentent de dériver pour justifier la dérivabilité, souvent sans succès dans le calcul. D'autres justifient la dérivabilité en évoquant la continuité. On notera également que la fonction g n'est pas polynomiale.

Q2. Le calcul de la dérivée a posé de nombreux problèmes. Par ailleurs, beaucoup de candidats ne savent pas justifier les calculs de limite. Les correcteurs ont sanctionné la situation, heureusement rare, où seul un tableau de variations est présenté, sans aucun détail ni justification.

Q3. L'équation de la tangente n'est pas connue d'un grand nombre de candidats.

Q4. La plupart des candidats ne savent pas exploiter le développement limité pour trouver la position relative de la tangente au voisinage d'un point.

Q5. Les correcteurs ont été surpris de découvrir de nombreux graphiques où les tangentes sont non tangentes à la courbe.

Q6. L'encadrement demandé dans l'énoncé est juste, quoiqu'un peu artificiel, il aurait été plus naturel de demander un encadrement de l'intégrale entre $g(e^{-1})$ et 1. Si l'un ou l'autre des encadrements a été donné, le candidat a obtenu la totalité des points. Les candidats ayant mis en avant la compréhension graphique de la notion d'aire sous la courbe ont été valorisés.

Q7. La question a été majoritairement bien traitée. De rares candidats ne connaissent pas les primitives usuelles.

Q8. Il ne suffit pas d'évoquer que « x l'emporte sur ln(x) » ou encore que « x a l'avantage sur ln(x) ». L'énoncé donnant la valeur limite et demandant de la justifier, l'expression « croissances comparées » est attendue dans cette question.

Q9. Même si les fonctions de l'intégration par parties sont bien posées, beaucoup ne savent pas dériver $x \rightarrow (\ln x)^k$. Dans ce cas, il est souvent regrettable de ne pas aboutir sur une formule cohérente avec la dérivée donnée, les candidats cherchant à retomber par la formule donnée dans l'énoncé.

Q10. L'énoncé indique que l'initialisation doit s'effectuer pour $k = 0$ et non $k = 1$ comme cela a parfois été écrit. Cette initialisation a souvent été bien traitée ainsi que le cas $(n, k) = (0,0)$. Il est important de justifier chaque étape dans l'hérédité en citant soit l'hypothèse de récurrence soit la question ou la propriété utilisée. Certains, au cours de l'hérédité, ont re-détaillé l'intégration par parties effectuée en Q9.

Q11. Bien que le bon développement en série entière de l'exponentielle soit souvent donné, son rayon de convergence, qui par définition est un nombre et non un domaine, n'est pas toujours correct. Certains élèves confondent développement en série entière et développement limité.

Q12. Les correcteurs ont tenu compte du fait que le programme de la filière TSI ne permet pas de justifier rigoureusement l'échange série-intégrale, en valorisant les explications cohérentes de certains candidats.

Q13. Question bien traitée pour ceux qui se réfèrent aux questions précédentes.

Q14. Peu d'étudiants ont abordé la question. Certains ont malgré tout bien géré la boucle « tant que ».

Q15. Beaucoup proposent comme ensemble de définitions l'ensemble des réels alors que la fonction est une fonction de deux variables.

Q16. Le calcul des dérivées partielles a posé beaucoup de problèmes. Certains ont malgré tout parfaitement traité cette question.

Q17. Trop souvent les candidats évoquent le développement limité de $x \to (1+x)^{\alpha}$. Par ailleurs, lorsqu'il est utilisé, celui de $x \to \ln(1+x)$ au voisinage de 0 est trop souvent malmené.

Q18. Question peu abordée. Se contenter de $f(1,1) = 0$ n'est pas suffisant pour donner la nature d'un point.

Q19. La notion de plan tangent à l'aide du gradient a été mise en avant dans les copies présentant une solution à cette question.

Problème II.

Q20. Certains calculent la valeur de l'intégrale, ce qui n'était pas demandé ici. Dans ce cas, les correcteurs ont apprécié les copies où le calcul s'effectue sur $[0, A]$ puis par passage à la limite. Les intégrales de Riemann ne sont pas les seules intégrales de référence. La comparaison série-intégrale était possible si toutes les hypothèses étaient énoncées, la perte de temps était cependant non négligeable pour cette stratégie.

Q21. Nombreux sont les candidats qui font usage du critère de d'Alembert, ce dernier permettant de répondre à la convergence mais pas de calculer la somme. Par ailleurs, la condition $r < 1$ n'est pas suffisante pour assurer la convergence de la série géométrique de terme général r^n. Enfin, (le fait que) $|u_{p+1} / u_p| < 1$ ne permet pas non plus d'affirmer la convergence de la série.

Q22. Cette question a posé beaucoup de problèmes. La gestion des calculs a fait perdre beaucoup de temps à certains candidats.

Q23. Question peu traitée. L'indication, lorsqu'elle est suivie, est souvent malmenée. Malgré cela, le calcul d'une somme géométrique est souvent juste. De nombreuses copies proposent un glissement d'indice correct. L'énoncé ne précisait pas le domaine de validité de la formule selon x. Cette relation se démontre d'abord pour $x \neq 0\ [\pi]$ puis en étendant la validité sur R par prolongements par continuité. Les candidats qui se sont contentés d'un calcul formel ont été valorisés.

Q24. Trop peu de candidats ont l'idée de partir du résultat de la question précédente.

Q25. La relation de Chasles n'a que trop rarement été citée par les étudiants ayant traité cette question.

Q26. Des étudiants se lancent souvent sans succès dans des calculs rocambolesques sans prendre en compte la parité, argument pourtant efficace dans le cadre des séries de Fourier.

Q27. Le changement de variable a été assez bien réalisé, mais en ne détaillant que très succinctement le travail à réaliser sur les bornes.

Q28. et **Q29**. Questions assez peu traitées. Étant donné que le résultat est donné, il convient de bien justifier les étapes.

Q30. Les hypothèses du théorème de Dirichlet constituaient le cœur de la question, il est à regretter que cette question très proche du cours n'ait pas été abordée avec succès par les candidats.

Problème III.

Q31. La matrice attendue a été bien donnée pour la grande majorité des candidats. Malgré tout, certains ont remplacé la valeur de θ par une valeur arbitrairement choisie, ce qui n'a pas été valorisé. D'autres donnent des matrices de taille 3 x 3.

Q32. Même lorsque la question précédente a été bien traitée, cette question a été largement passée.

Q33. Ceux qui se souviennent de ce qu'est une affixe ont correctement traité la question.

Q34. Alors que la première partie de la question a bien été traitée, quasiment aucun candidat n'a pensé à justifier que ces racines de l'unité étaient au nombre de n et étaient les seules. Certains se lancent dans une récurrence qui conduit presque inévitablement à un raisonnement farfelu.

Q35. L'énoncé aurait dû restreindre k à l'ensemble $\{0, \dots, n-2\}$. Les candidats ayant pris l'indice k dans $\{0, \dots, n-1\}$ comme l'énoncé l'indiquait n'ont bien évidemment pas été sanctionnés.

Q36. Cette question indépendante des précédentes n'a étonnamment que peu été traitée et quand elle l'est, la forme algébrique d'un nombre complexe n'est pas toujours connue.

Q37. Les correcteurs ont valorisé les copies qui proposaient une explication claire et cohérente pour cette question dont la solution peut s'avérer délicate à rédiger.

Q38. La formule des probabilités totales devait être citée, ce qui n'a que trop rarement été fait. Les candidats ayant cité la formule des probabilités totales ont pleinement réussi la question et le calcul inhérent.

Q39. Question bien traitée dont on pouvait vérifier la réponse grâce à la matrice qui suivait.

Q40. Même s'il n'était pas attendu que l'expression « théorème spectral » soit présente, il convenait d'évoquer les deux hypothèses : symétrique et réelle.

Q41. Bien traitée pour une bonne partie des candidats, quand d'autres tentent un calcul apocalyptique du rang de la matrice, ou utilisent une généralisation de la formule de Sarrus.

Q42. Le calcul du polynôme caractéristique n'est ici ni demandé ni nécessaire. La plupart des candidats l'ont pourtant calculé.

Q43. Trop de candidats ne connaissent pas la définition de vecteur propre.

Q44. Une base de l'image n'a que trop rarement été donnée. Le théorème du rang est peu cité. La question n'a été traitée correctement que dans de rares copies.

Q45. Le lien entre la puissance d'une matrice et son écriture à l'aide de la matrice diagonale semblable a été largement réussie pour les candidats ayant abordé cette question.

Q46. Question bien faite par ceux qui la traitent. Parfois on ne trouve que le calcul de l'espérance et pas la première partie de la question.

Q47. La plupart des candidats ayant commencé cette question ont bien compris qu'il suffisait de montrer que l'ensemble était un sous-espace vectoriel. Cependant, aucun candidat n'a précisé de quel espace vectoriel général, la partie était un sous-espace vectoriel. Ce dernier point n'a pas été évalué dans le barème.

Q48. Les assertions liées au produit scalaire sont connues mais sont trop souvent restées non exploitées dans la question. Soulignons que le caractère « défini » n'est valable qu'à condition d'assimiler deux variables aléatoires dès lors qu'elles sont égales presque sûrement. Cette difficulté n'a pas été prise en compte dans le barème et n'a gêné ni le déroulé du problème, ni les candidats.

Q49. Quelques candidats ont abordé cette question même si des justifications ont souvent manqué.

Q50. Nombreux sont les candidats qui donnent une dimension sans la moindre justification. Il convenait ici de justifier que la famille engendrant F était une base. Beaucoup justifient le caractère libre par l'indépendance mutuelle des variables aléatoires.

Q51. Peu de candidats ont traité cette question et tous les arguments n'étaient pas toujours présents.

Q52. Abordée dans de très rares copies.

3/ CONCLUSION

Comme les années passées, les correcteurs souhaitent mettre l’accent sur l’importance de l’apprentissage du cours : définitions aux énoncés complets (hypothèses et conclusions), nom des théorèmes et formules. Ce manque d’apprentissage a pénalisé un grand nombre de candidats.

Les correcteurs invitent les candidats à mettre en valeur le numéro des questions et les résultats apportant une réponse aux questions et dans la mesure du possible à traiter les questions dans l’ordre.

Enfin, les démarches pour obtenir un résultat, souvent donné dans l’énoncé, doivent être justifiées et argumentées de façon précise. La rigueur et l’honnêteté intellectuelle sont autant de qualités indispensables pour tout futur ingénieur.