

1/ MODALITÉS DE L'ÉPREUVE

Organisation pratique

L'épreuve orale de mathématiques de la session 2019 dure une heure et se compose de deux parties de durées égales : une première phase de préparation d'une durée d'une demi-heure et une seconde phase d'interrogation au tableau. Chaque sujet comporte deux exercices indépendants, portant sur des thèmes distincts du programme de première année ou de deuxième année de TSI. Les exercices proviennent d'une banque commune à l'ensemble des examinateurs. Ils sont conçus pour aborder plusieurs pans du programme. Un des deux exercices est guidé question par question et rédigé de façon progressive, afin que tout candidat sérieux puisse raisonnablement aborder cet exercice. Le deuxième exercice est plus ouvert et est l'occasion d'une présentation des pistes de recherche, des résultats et des expériences du candidat.

Pendant l'oral, l'interrogateur prend des notes à l'aide d'un ordinateur. Cela ne l'empêche aucunement d'être attentif au discours du candidat.

Calculatrice

La calculatrice personnelle n'est autorisée dans aucun sujet de mathématiques pour cette session. Ce choix s'appuie sur une volonté d'égalité entre les candidats. De plus, aucun exercice n'a nécessité l'utilisation d'un outil numérique. L'accent a été mis sur les connaissances du candidat et tout calcul délicat était accompagné.

Notation et attendus

La notation des prestations des candidats porte à la fois sur leur maîtrise du cours, mais aussi sur les compétences mathématiques apparaissant dans les programmes de CPGE aussi bien en première année qu'en deuxième année.

Les examinateurs sont particulièrement attentifs à la connaissance des définitions fondamentales et à la précision des énoncés des théorèmes principaux du cours.

Dans tous les cas, les candidats sont interrogés sur les deux exercices

Dispositions pour l'épreuve orale de la session 2020

Comme annoncé dans le rapport de l'épreuve orale de l'an passé, le format de l'épreuve va évoluer pour la session 2020.

- Préparation (30 minutes) : chaque candidat recevra l'énoncé d'un exercice de mathématiques, avec un questionnement détaillé, contenant une ou deux questions nécessitant l'utilisation de Python, soit comme aide à la conjecture, soit comme illustration, soit comme outil de calcul numérique. Un ordinateur sera à disposition du candidat durant la préparation. Les interrogations porteront sur le programme de mathématiques, mais pourront s'appuyer sur des compétences du programme d'informatique pour tous.

- Interrogation (30 minutes) : le candidat disposera d'un maximum de 20 minutes pour exposer au tableau l'exercice préparé, en se servant de l'outil informatique s'il le juge nécessaire. L'utilisation de Python en tant que support pour répondre à d'autres questions que celles spécifiquement identifiées comme nécessitant l'usage de l'outil informatique sera possible avec l'accord de l'examineur. Dans le temps restant, une question ouverte non connue du candidat

lors de sa préparation sera proposée à la lecture. Dans certains cas qui seront précisés, le candidat aura la possibilité de proposer des pistes mettant en œuvre Python, mais cela ne sera en aucun cas une obligation.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

La moyenne de l'épreuve est satisfaisante et s'inscrit dans la lignée des années antérieures. Cependant, de trop nombreux candidats n'ont pas suffisamment tenu compte des rapports précédents.

L'attitude des candidats a été globalement appréciée par les examinateurs : ponctualité, politesse, qualité convenable de la présentation de l'exposé oral. Les examinateurs déplorent cependant que trop de candidats ponctuent leurs phrases de locutions à la mode telles que « du coup », quand d'autres oublient de les finir ou d'y adjoindre un verbe. L'utilisation d'un vocabulaire adapté et précis est un attendu de l'épreuve orale. Sur le fond, les examinateurs s'étonnent également de la faible maîtrise du cours de la part d'un trop grand nombre de candidats. Les examinateurs sont disposés à aider les candidats qui rencontrent une difficulté sur une question délicate mais dans une attitude d'accompagnement et non pas de formation. Globalement les candidats ont fait preuve d'une bonne technicité dans leurs calculs, mais ont trop souvent tendance à se précipiter sur des méthodes parfois lourdes, sans prendre le recul nécessaire. Il est par exemple chronophage et inélégant de calculer le polynôme caractéristique d'une matrice idempotente. Nous notons également que le raisonnement pas analyse-synthèse est inconnu de la grande majorité des candidats. Enfin, presque tous les candidats citent les hypothèses d'un théorème en commençant leur phrase par « il faut que » : rappelons qu'il s'agit de conditions suffisantes non toujours nécessaires, et que cette distinction essentielle mérite d'être mieux comprise.

L'exercice ouvert est le moment privilégié où une discussion peut s'instaurer entre le candidat et l'examinateur. Sa finalité n'est pas l'obtention directe d'un résultat mais plutôt l'exposé d'une démarche, l'expression d'idées, la compréhension du problème et les liens établis avec les connaissances du candidat. La présentation de calculs menés correctement et écrits en langage mathématique est un aspect non négligeable à prendre en compte par le candidat.

De plus, chaque exercice proposé forme un tout. La capacité de prendre en compte les résultats des questions précédentes ou des données intermédiaires est partie intégrante de l'évaluation de la prestation du candidat. Un futur élève ingénieur doit être en mesure d'articuler et de synthétiser des données afin de répondre à un problème, notamment quand chaque pas de démonstration est guidé. Cette année encore, des candidats ont éprouvé de grandes difficultés à mettre en relation les questions. Enfin, l'autonomie et la prise de décision font partie des compétences nécessaires à la réussite d'une épreuve orale. Ces capacités sont attendues pour suivre une formation d'ingénieur.

Une épreuve orale

La spécificité de l'épreuve orale de mathématiques repose sur la gestion des différentes parties : préparation et exposé.

Le temps de préparation doit être consacré à la mise en relation de la demande de l'énoncé aux connaissances vues dans le cours aussi bien en première année qu'en deuxième année. Ce moment ne doit pas être réduit à une rédaction comme il serait attendu lors d'une épreuve écrite. Par ailleurs, la lecture des exercices doit être attentive et complète. S'il peut être difficile pour certains candidats de finir l'intégralité d'une planche lors de la préparation, il n'en reste pas moins vrai qu'une lecture complète est nécessaire pour comprendre le problème dans sa globalité.

Lors du passage, certains candidats exposent de manière synthétique leurs idées, permettant ainsi d'avancer plus rapidement dans les exercices. Un étudiant autonome, exploitant judicieusement le temps et la répartition de celui-ci en prenant soin de présenter synthétiquement l'exercice préparé est très souvent récompensé.

Les courbes et les graphiques peuvent être de bons supports pour peu que les axes et les points remarquables soient indiqués, mais ils ne constituent pas une démonstration. Ainsi une comparaison de fonction sur un ensemble fait souvent appel à l'introduction d'une fonction auxiliaire. La connaissance des courbes usuelles est un attendu non négligeable (par exemple : arctangente, racine carrée, arcsinus, etc.). Ceci est évidemment valable en analyse où des arguments d'intégration se transposent en argument sur des aires. Cette approche graphique peut être un premier pas pour estimer la valeur attendue d'une intégrale, notamment dans le cas des séries de Fourier ou de comparaison série-intégrale. Dans le cas des isométries ou des projections et des symétries, une représentation graphique signifiante et claire est un minimum attendu par l'examinateur. La notion de plan tangent gagne à être

illustrée. En probabilités, présenter la situation à l'aide d'arbres ou de graphes aide à la compréhension mais ne reste qu'une étape avant la formalisation et la résolution à l'aide d'outils du cours.

Les capacités du candidat à communiquer, à échanger et à prendre en compte les remarques de l'examineur sont également évaluées. Il est donc judicieux de noter une indication donnée au tableau avec la rigueur inhérente aux mathématiques. De plus, l'examineur apporte une aide bienveillante et les remarques sont là pour favoriser la démarche de l'élève et non pas le contraindre. Il est dommageable de voir qu'un candidat ne prenne pas en compte les remarques de l'examineur. De même, si un candidat peut demander une reformulation de l'aide apportée par l'examineur, il est à son désavantage de ne pas en tenir compte.

Les examinateurs ont apprécié les prestations de candidats se mettant en position de dialogue pour des questions non abordées durant la présentation et se montrant enthousiastes à chercher au tableau. L'épreuve orale donne l'occasion à l'examineur de vérifier les connaissances du candidat sur des domaines connexes à l'énoncé soumis, ainsi le tracé de courbes de référence, l'énoncé précis et exact d'un théorème, une série usuelle peuvent être demandés. Le deuxième exercice par sa nature d'ouverture nécessite une attention particulière sur les pistes indiquées par l'examineur et met en avant la capacité de conjecture et de mobilisation de connaissances du candidat. Les examinateurs ont évalué positivement toute démarche proposée ou tests démontrant la capacité de modélisation et d'appropriation de l'énoncé. Dans le cas d'un calcul de puissance n ème de matrice, proposer le calcul des premiers termes sans pour autant aboutir à une relation de récurrence ou un résultat probant est perçu positivement.

La gestion du tableau

Une bonne gestion du tableau est appréciée. La présentation doit être claire, ordonnée, et les expressions mathématiques doivent respecter la rigueur du formalisme. Il est en revanche déconseillé de tout écrire au tableau : il s'agit d'une épreuve orale. Il est avisé de faire ressortir les résultats obtenus au tableau afin de faciliter leur utilisation dans la suite du problème. Noter les résultats intermédiaires dans une partie réservée du tableau est une saine habitude.

On rappelle aux candidats qu'ils doivent demander avant d'effacer le tableau. Ce dernier doit être lisible pour qu'une discussion ou une aide basée sur les résultats et recherches du candidat puisse s'instaurer. Sans demander une calligraphie parfaite ou une rigueur excessive, un soin apporté à l'écriture symbolique permet une meilleure lecture de l'examineur et donc une aide plus aisée.

Remarques particulières en analyse

Les hypothèses du théorème d'intégration par parties, de la bijection, de Dirichlet doivent être citées sans qu'il soit besoin d'insister ou de les réclamer. Une démarche n'est valide que si elle est justifiée.

Les développements limités sont dans l'ensemble mal connus et l'importance du voisinage a été négligée.

Une confusion entre primitive et intégrale est difficilement acceptable pour un élève ayant suivi une formation en CPGE scientifique.

Les intégrales impropres ne sont considérées qu'au point posant problème, l'aspect continu de l'intégrande sous le signe intégral est souvent oublié. On peut ainsi régulièrement voir un candidat appliquer un théorème élaboré de convergence par équivalent (et l'appliquer correctement) puis omettre toute autre considération. Les différents théorèmes au programme sont importants et les méconnaître est évidemment sanctionné.

Certains candidats ignorent ce qu'est une série entière.

La gestion et la concentration sont des points positifs appréciés par les examinateurs. Il y a eu de nombreuses confusions entre somme partielle et série. Certains candidats ne prêtent pas attention aux indices de fin et se contentent d'écrire le signe somme de manière brute, souvent cette attitude a des conséquences négatives sur l'évaluation de leur prestation. De plus, la manipulation sur des séries nécessite de connaître leur convergence.

Le critère de D'Alembert est un outil lié à l'étude de la convergence d'une série, son énoncé correct peut être demandé. Une confusion a été perceptible chez plusieurs candidats entre ce critère et l'étude du quotient de deux termes consécutifs d'une suite. Un quotient n'a d'existence qu'après avoir vérifié la non nullité du dénominateur.

Les suites récurrentes d'ordre 2 nécessitent une connaissance convenable des formules inhérentes ; faire le lien entre celles-ci et la résolution d'équation différentielle ne doit pas occulter les spécificités des deux notions. Un écueil concernant l'écriture des solutions des suites récurrente d'ordre 2 dans le cas d'une racine double a été rencontré.

Les équations différentielles ont été bien traitées par les candidats sérieux et ayant appris leur cours.

Les changements de variable étant indiqués le plus souvent dans les énoncés, l'enjeu de la question réside dans la gestion du calcul indiqué. Les examinateurs félicitent les candidats dont la technicité a été jugée satisfaisante.

Remarques particulières en algèbre et en géométrie

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ne se limite pas à la stabilité par combinaison linéaire d'éléments. La non-vacuité de l'ensemble est une exigence de la définition. Un attendu de l'oral est la capacité à adapter et comprendre des connaissances apprises. Connaître une définition est vital pour répondre à une question mais la citer sans adaptation peut interroger l'examineur sur la solidité de la compréhension du candidat.

Une représentation graphique est un support appréciable, utile et valorisé dans le cadre d'un exercice de géométrie, même si cela ne constitue pas une preuve. Peu de candidats y ont recours de manière naturelle sans la demande de l'examineur. Les candidats sont invités à faire des figures de taille suffisante, et à réfléchir aux choix d'un système de coordonnées adapté au problème posé. Ajoutons qu'un repère n'a d'existence qu'avec une définition explicite de l'origine et de sa base, il s'agit bien d'une représentation symbolique d'une situation mathématique et non pas la réalisation d'un croquis à la va-vite. La compréhension du terme « direct » a posé des difficultés. Enfin de nombreuses confusions existent dans l'écriture, mais aussi la représentation géométrique, des ensembles de définition à plusieurs variables. Par exemple, il convient de savoir déterminer et représenter précisément l'ensemble de définition de la fonction qui au couple de réels (x,y) associe la valeur $\ln(x)-\ln(y)$.

Les exercices portant sur le gradient ont révélé des lacunes importantes quant à la représentation même de cet objet mathématique. Un dessin pour étayer les propos est un réel plus dans la présentation d'un candidat. Les termes points réguliers, points singuliers et points critiques ont posé des difficultés à des candidats ne maîtrisant pas le vocabulaire. L'équation du plan tangent à une surface $z = f(x,y)$ est méconnue. De nombreux candidats confondent étude locale et globale de leurs positions relatives.

De nombreux candidats ne savent pas reconnaître l'équation cartésienne d'un cercle. Cela est d'autant plus décevant lorsque celui-ci est centré en l'origine du repère.

Les énoncés proposés nécessitent a minima de connaître les définitions de matrice orthogonale, matrice semblable, matrice inversible ou matrice diagonalisable, matrice symétrique, matrice antisymétrique.

Trop peu de candidats sont capables de déterminer à partir d'une matrice, son rang, son image et son noyau, même dans des cas évidents.

Le calcul de déterminant est dans l'ensemble bien réalisé et l'écriture proposée au tableau est satisfaisante. Certains candidats confondent linéarité et n-linéarité. La trace et la transposée n'ont pas posé de difficulté. L'alternance des signes lors du développement suivant une ligne ou une colonne a été omise par certains candidats les menant ainsi vers des résultats erronés.

L'étude des matrices de transformations a été bien réussie dans l'ensemble. Les candidats ont fait preuve de connaissances sûres sur la classification et ont su dépasser les éventuelles erreurs de calcul en expliquant de manière claire et posée leur démarche.

Si la définition d'endomorphisme est connue par une large majorité des candidats. Le terme d'automorphisme n'a pas connu le même succès.

La notion de dimension a été bien comprise et le théorème du rang bien exposé.

Parmi les méthodes usuelles de l'algèbre linéaire, les techniques de réduction de matrices sont en général bien connues. Cependant la vérification d'appartenance d'un vecteur à un noyau ou à un espace propre sans avoir recours à un protocole appris par cœur laisse entrevoir la limite d'un apprentissage par répétition exempte de sens. L'oral est l'occasion de mettre en avant la polyvalence des méthodes et la mobilisation de la réflexion du candidat face à une question.

Les questions portant sur le produit scalaire ont posé des problèmes de connaissance de cours notamment pour montrer le caractère défini de celui-ci. Certains énoncent les critères comme une litanie sans en comprendre le sens, quand d'autres peinent à exposer précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Les exercices traitant des courbes paramétrées ont été dans l'ensemble bien menés. La réduction du domaine d'étude et l'interprétation géométrique ont été le parent pauvre de cette partie du programme. La symétrie nécessite un domaine d'étude centré et permet une appréhension graphique de la courbe. Par ailleurs, la notion de tangente

et son obtention via la lecture d'un tableau de variation correctement rempli a posé des difficultés. Le tracé reste hasardeux pour les étudiants non préparés à lire de tels tableaux.

Remarques particulières en probabilités

Une des plus grandes difficultés relevées est la difficulté de compréhension du texte présenté. Certains candidats se contentent de proposer une loi du cours sans prendre la peine de justifier le choix de leur réponse voire l'adéquation de leur réponse au problème posé.

Il est à noter également que les lois usuelles ne sont pas connues ou alors de manière trop approximative pour permettre de répondre aux attentes de l'énoncé. Un effort devrait être porté sur les valeurs prises par une variable aléatoire, première donnée essentielle à une présentation plus calculatoire de sa loi.

La formule des probabilités totales et la formule des probabilités conditionnelles ont été correctement utilisées dans l'ensemble. La notion fondamentale de système complet d'événements n'est pas citée de manière automatique et révèle une maîtrise superficielle de sa définition.

On souhaiterait que les candidats fassent un effort de réécriture des événements (à l'aide d'intersection, d'union, de complémentaires) avant de se lancer dans le calcul des probabilités. La confusion entre événement et probabilité est encore à déplorer cette année.

3/ CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Lors de la remise du sujet, les examinateurs recommandent de lire une première fois la totalité de l'énoncé et de partager équitablement le temps de préparation afin d'aborder les deux exercices. Dans la préparation de chaque exercice, il peut être judicieux de réfléchir, avant tout calcul, à la stratégie que l'on abordera. De même, consacrer une partie de son brouillon à un exercice et une autre partie au deuxième exercice évite de perdre du temps à la recherche de son travail.

Lors de la présentation orale, les candidats peuvent admettre des questions. Par ailleurs, il est inutile d'attendre l'assentiment de l'examineur après chaque question. Quelques candidats attendent un signe pour valider leur démarche. Les examinateurs sont dans une position bienveillante, mais l'oral reste une épreuve de concours et pas un moment de formation. Rappelons qu'il n'est pas nécessaire de terminer les deux exercices pour obtenir une bonne note. Enfin, les qualités de communication du candidat sont valorisées : clarté de l'expression, dynamisme de la présentation, prise en compte des remarques et écoute attentive de l'examineur.

Un exposé succinct mais précis des résultats obtenus est attendu. Dans cet esprit, il est inutile de recopier le détail des calculs au tableau. Il convient d'en indiquer les grandes lignes ainsi que le résultat final. L'organisation des calculs est primordiale, que ce soit pour la recherche d'une erreur ou l'appréciation de la prestation du candidat.

Les théorèmes utilisés seront cités et leurs hypothèses vérifiées avec soin. Il pourra aussi être judicieux d'illustrer ses propos par des figures en géométrie, ou des graphes de fonctions, ou un cercle trigonométrique lorsque que l'occasion se présente. Toute démarche est valorisée, l'oral est l'occasion de juger les capacités d'un candidat de proposer des idées et d'éclairer un tiers sur la démarche qu'il souhaite suivre.

Dans le cas où une question viendrait à poser problème, il est recommandé d'indiquer toutes les pistes explorées, ce qui permettra d'engager un dialogue avec l'examineur. Rappelons à cet égard que les questions (ou les remarques) de l'examineur ont pour but d'aider les candidats à s'interroger sur la pertinence de leurs résultats et à les remettre sur une bonne voie. En aucun cas, les remarques de l'examineur ne visent à déstabiliser le candidat : il s'agit au contraire de le conduire à se poser les bonnes questions.

Globalement, les prestations des candidats sont assez satisfaisantes, tant sur le fond que sur la forme. Les examinateurs félicitent les candidats pour le sérieux de leur travail pendant leur préparation, et souhaitent bon courage aux futurs candidats.