

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

- (1) **a.** Rappeler la dérivée de la fonction *Arctan* et son ensemble de définition.
b. Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} dv.$$

- (2) Pour $a > 0$, on pose

$$J(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+a \sin^2(x)} dx.$$

- a.** Justifier que $J(a)$ existe pour a fixé.
b. À l'aide de l'outil informatique, en utilisant la méthode des rectangles, donner une valeur approchée de $J(3)$.
c. Montrer que pour tout x réel

$$\frac{1}{1+a \sin^2(x)} = \frac{1 + \tan^2(x)}{1 + (a+1) \tan^2(x)}.$$

- d.** À l'aide du changement de variable $u = \tan x$, montrer que

$$J(a) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(a+1)u^2} du.$$

- e.** En déduire que $J(a) = \frac{C}{\sqrt{a+1}}$ où $C > 0$ est une constante à déterminer.
 On pourra vérifier le résultat à l'aide du résultat de la question 2.(b).

- (3) On pose $J_n = J(e^{n\pi})$.
 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} J_n$.
-

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H) \quad 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E) \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$$

- (1)
 - a. Justifier, sans les déterminer, que (H) admet des solutions sur $]0, +\infty[$.
 - b. Que doit-on rajouter comme donnée pour avoir une unique solution ?
- (2) Dans cette question, on cherche à déterminer une valeur approchée de la solution y de (H) avec la condition initiale $y(1) = 1$ sur l'intervalle $[a, b] = [1, 2]$.
 - a. Expliquer la méthode d'Euler.
 - b. Écrire une fonction `euler` avec en paramètre n (permettant de fixer le pas $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n}$) qui donne une approximation de la solution de l'équation (H). La fonction doit renvoyer deux listes : la liste X des x_k et la liste Y des $f(x_k)$. On pourra utiliser :

$$y_{k+1} = \left(\frac{3h}{2x_k} + 1 \right) y_k$$

- (3) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 - (4) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 - (5) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
-

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

On considère la matrice réelle M suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1)
 - a. Calculer M^2 .
 - b. Calculer M^3 .
- (2) Établir une relation entre M , M^2 et M^3 .
- (3) On considère le polynôme $P = X^3 - X^2 - 2X$. Déterminer les racines de P .
- (4)
 - a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la relation de division euclidienne de X^n par P , on notera R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par P . Le degré de R_n devra être précisé.
 - b. Évaluer l'expression précédente en 0, -1 et 2.
- (5) Dédurre de ce qui précède la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (6) On considère les suites réelles (a_n) , (b_n) et (c_n) définies par $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n \\ c_{n+1} = a_n \end{cases} .$$

- a. Écrire une fonction en Python prenant en paramètre un entier n et renvoyant les valeurs a_n , b_n et c_n .
 - b. Donner une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
-

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

On dispose de deux boites A et B . Au départ, A contient deux jetons marqués 0 et B deux jetons marqués 1. On extrait au hasard et simultanément un jeton de A et un jeton de B et on les change de boites. On effectue cette manipulation n fois. Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans A à l'issue de ces n manipulations.

- (1) Déterminer les valeurs possibles et la loi de X_1 .
- (2) Écrire une fonction en Python qui simule la répartition des jetons dans chaque boite au cours des n manipulations.

On pourra commencer par définir $A = [0, 0]$ et $B = [1, 1]$. Pour avoir un nombre aléatoire entier entre 3 et 9 bornes incluses en Python on pourra utiliser les commandes suivantes :

```
1 import random
2 nombre_aleatoire_entre3_et_9=random.randint(3, 9)
```

Pour avoir un nombre aléatoire réel entre 0 et 1 bornes exclus en Python on pourra utiliser les commandes suivantes :

```
1 import random
2 nombre_aleatoire=random.random()
```

- (3)
 - a. Pour tout $i \in \{0; 1; 2\}$ et pour tout $j \in \{0; 1; 2\}$, calculer les 9 résultats $P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = i)$ pour $n > 1$.
 - b. Exprimer la loi de X_n en fonction de celle de X_{n-1} pour $n > 1$ (on attend ici une formule et non une tableau).
- (4) Soit C_n la matrice colonne donnant la loi de X_n , c'est-à-dire

$$C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

- a. Déterminer une matrice A telle que $C_n = AC_{n-1}$ pour $n > 1$.
 - b. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
 - c. Soit n un entier naturel non nul. À l'aide de la question précédente, déterminer A^n puis la loi de X_n en fonction de n .
-

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

On se place sur $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels. On définit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X], \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$$

- (1) Démontrer que φ est un produit scalaire.
- (2) Écrire un script en langage Python pour calculer $\varphi(X^2 + 1, X^2 - 1)$.
- (3) Calculer $\|X^2 - 5\|$.
- (4) Déterminer une base orthormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$.

- (6) Calculer la distance de $X^2 + 1$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
-

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, l'exercice s'intéresse à l'inversibilité de la matrice carrée d'ordre n :

$$M_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

On considérera également $\Delta_n(x) = \text{Det}(M_n(x))$.

- (1)
 - a. Démontrer que $M_1(x)$ et $M_2(x)$ sont inversibles pour tout $x \in \mathbb{R}$
 - b. À l'aide de l'outil informatique, comparer la fonction Δ_4 et la fonction $x \mapsto 1+x^2+x^4+x^6+x^8$.
 - c. Émettre une conjecture sur la forme de $\Delta_n(x)$.
 - (2) Établir une relation de récurrence liant $\Delta_{n+2}(x)$, $\Delta_{n+1}(x)$ et $\Delta_n(x)$
 - (3) Démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.
 - (4) Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_n(x)$ est-elle inversible ?
 - (5) Dans cette question on considère que $x \in \mathbb{C}$.
 - a. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_1(x)$ n'est pas inversible ?
 - b. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_2(x)$ n'est pas inversible ?
 - c. Généraliser les résultats précédents pour déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{C}$ la matrice $M_n(x)$ est inversible.
-