

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

THÈME

Le sujet débutait par deux exercices indépendants.

Le premier, assez simple mais calculatoire, tournait autour de la réduction d'une matrice de taille 3.

Le deuxième proposait des propriétés topologiques de l'espace des matrices carrées.

Ensuite, un problème définissait les similitudes vectorielles d'un espace euclidien puis étudiait ses propriétés notamment à travers des exemples et avec un peu de géométrie.

Le texte couvrait une grande partie du programme de cette épreuve : algèbre linéaire, algèbre bilinéaire, topologie.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES

L'énoncé était clair et les questions, de difficulté variée, permettaient à tous les candidats, même faibles de s'exprimer. Le sujet a permis aux étudiants d'aborder quasiment toutes les questions même sans avoir traité les questions précédentes. Ce sujet récompensait bien les élèves sérieux et travailleurs. Ils pouvaient y retrouver des exercices classiques abordés pendant leur année de MP.

Un nombre non négligeable de candidats ignore toujours que les résultats et conclusions doivent être mis en évidence : soulignés ou encadrés.

La moyenne de l'épreuve est de 10,01 et l'écart type est de 4,74.

La forte disparité entre les copies (il y a eu également d'excellents candidats qui ont réussi brillamment l'épreuve) a permis d'obtenir un écart-type assez fort engendrant une discrétisation de l'ensemble des étudiants. À ce titre, ce sujet a parfaitement rempli son rôle.

3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

Exercice I

Malgré le fait que le sujet proposait de faire les calculs sur un brouillon, bon nombre de candidats remplissent jusqu'à 3 pages pour calculer le polynôme caractéristique et donner la matrice de passage P .

- Q1. Oubli de matrice symétrique réelle.
- Q2. La plupart donnent la forme diagonale de B et c'est tout. Beaucoup de difficultés pour calculer l'inverse d'une matrice.
- Q3. Beaucoup d'erreurs de calcul.
- Q4. Polynôme minimal souvent donné sans explication. 'Scindé' et 'scindé à racines simples' sont souvent confondus. Division euclidienne peu faite. Il est important de savoir trouver un reste dans une division euclidienne de polynômes sans avoir à effectuer cette division.

Exercice II

- Q5. Question plutôt bien traitée mais pour certains « pas fermé » = « ouvert » !
Des candidats se placent dans \mathbb{R}^2 pour traiter la question. Enfin, d'autres, indexent tout selon la variable n .
- Q6. Bien traitée.
- Q7. Question difficile et la rédaction a parfois été hasardeuse. Pour la densité, cela a été plutôt bien fait par beaucoup de candidats. Cette question aura probablement été vue pendant l'année.
- Q8. La première partie, lorsqu'elle a été abordée, a été bien réalisée. Des erreurs de polynômes minimaux dans la seconde partie : on trouve comme polynôme minimal : 0 ou 1 !
- Q9. Heureusement que le rappel était là. Beaucoup de candidats confondent un raisonnement par contraposée d'un raisonnement par l'absurde.

Problème

- Q10. Trop de candidats se contentent de montrer que $\|u(e_i)\| = \|e_i\| \dots$
- Q11. Dessin très souvent faux, ainsi que le calcul des aires.
Trop souvent les candidats affirment que l'aire du second est plus grande que l'aire du premier : cela se voit sur le dessin.

- Q12.** Ici, c'est un florilège du bêtisier. Si x et y ont même norme ils sont égaux. Un endomorphisme injectif est bijectif. On ne dit pas que la dimension est finie. On tente de prouver la surjectivité. Pour la structure de groupe, idem. $\text{Sim}(E)$ est non vide car 0 est dedans. On montre l'associativité mais pas que la loi est interne.
On ne pense pas suffisamment à prouver que $\text{Sim}(E)$ est un sous-groupe, oui mais de quel groupe ? (pas de $L(E)$, ni de E !!).
- Q13.** Les candidats n'ont pas compris que c'était une question de cours et font de la paraphrase. La seconde partie n'a pas été toujours traitée.
- Q14.** Souvent faux, excepté la troisième assertion.
- Q15.** Presque tous s'y sont essayés avec plus ou moins de clarté.
Problème de quantificateurs : ils ne vérifient pas que « k » est indépendant de « r ».
- Q16.** Certains candidats oublient la valeur absolue en utilisant la propriété d'homogénéité de la norme, ou pensent à tort que le rapport d'une homothétie est toujours positif.
- Q17.** Parmi les candidats qui trouvent la bonne décomposition, peu précisent la nature de la matrice orthogonale obtenue.
- Q18.** L'identité de polarisation a été démontrée correctement par une grande majorité des candidats. Pour la suite de la question, un nombre conséquent de candidats pensent avoir démontré l'équivalence alors qu'ils n'ont démontré que l'implication directe (toute similitude dilate le produit scalaire d'un facteur k^2).
- Q19.** Beaucoup de candidats traitent au moins une partie de la question, le dernier point étant celui qui pose le plus de problèmes (conclure que u est une similitude). Assez peu invoquent correctement Pythagore. La plupart font une espèce d'« égalité triangulaire ».
Pour beaucoup, i et j sont nécessairement distincts.
- Q20.** Très peu de candidats ont réussi à finaliser correctement la question, malgré des tentatives essayant d'utiliser l'orthogonal de E .

4/ CONCLUSION

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numérotter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.

7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.