

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC**

PHYSIQUE**Mercredi 2 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

**Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants.
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.**

PROBLÈME 1

Dissipateur thermique

Partie I - Principe de fonctionnement

La plupart des appareils électroniques que nous utilisons dégagent une certaine partie de la puissance consommée sous forme thermique. Afin d'éviter une élévation trop importante de la température, qui pourrait s'avérer dommageable pour le composant ou son environnement, il faut la réguler. De nombreuses approches sont possibles mais nous allons nous concentrer sur l'utilisation de dissipateurs thermiques passifs.

À titre d'illustration, nous allons étudier le refroidissement d'un amplificateur de puissance courant, le LM 3875.

Dans un premier temps, nous examinerons le composant simple, sans support de régulation thermique (**figure 1**).

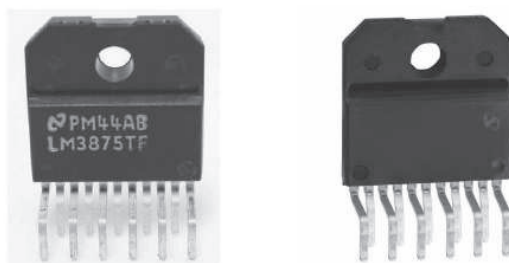


Figure 1 – Vues de face et de dos de l'amplificateur de puissance LM 3875

Dans un second temps, nous étudierons le composant équipé d'un dispositif de dissipation thermique (**figure 2**).

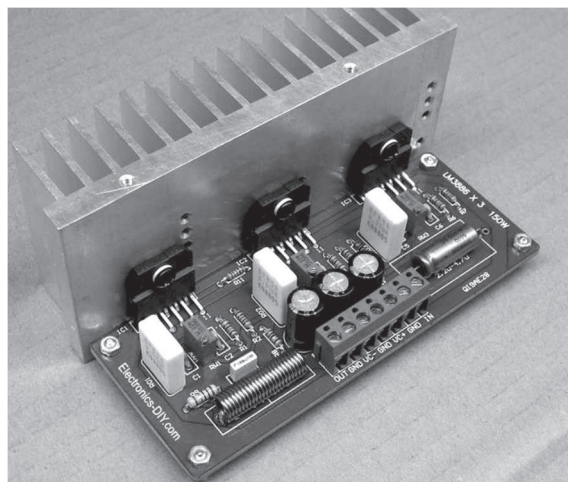


Figure 2 – Exemple de montage à 3 amplificateurs avec dissipateur thermique


I.1 - Généralités

- Q1.** Citer les 3 modes de transfert thermique et illustrer chacun d'entre eux par un exemple.
- Q2.** On note λ la conductivité thermique du matériau. Énoncer la loi de Fourier en définissant clairement chacun des termes qui la composent et en précisant leurs unités. Donner une interprétation physique de cette loi.

I.2 - Température maximale atteinte sans dissipateur

On suppose que l'amplificateur de puissance fonctionne sans dissipateur thermique. On note T_0 sa température et $T_a = 25\text{ }^\circ\text{C}$ la température ambiante, ces deux grandeurs étant constantes. Les échanges entre le composant et l'air sont de nature conducto-convective. La puissance ϕ ainsi échangée obéit à la loi de Newton, $\phi = h(T_0 - T_a)S$, où $h = 15,0\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ est le coefficient de transfert conducto-convectif et S représente la surface d'échange.

On donne la documentation technique de l'amplificateur de puissance (**document 1**) :

Document 1 - Documentation technique du LM 3875	
Extraits de la documentation technique de l'amplificateur de puissance LM 3875.	
	LM3875
www.ti.com	SNAS083D – JUNE 1999 – REVISED APRIL 2013
LM3875 Overture™ Audio Power Amplifier Series High-Performance 56W Audio Power Amplifier Check for Samples: LM3875	
FEATURES <ul style="list-style-type: none">• 56W Continuous Average Output Power Into 8Ω• 100W Instantaneous Peak Output Power Capability• Signal-to-Noise Ratio >95dB (min)• Output Protection From A Short to Ground or to the Supplies Via Internal Current Limiting Circuitry• Output Over-Voltage Protection Against Transients From Inductive Loads• Supply Under-Voltage Protection, Not Allowing Internal Biasing to Occur When $V+ + V- \leq 12\text{V}$, Thus Eliminating Turn-On and Turn-Off Transients• 11 Lead PFM Package• Wide Supply Voltage Range: $V+ + V- = 20\text{V}$ to 84V	DESCRIPTION <p>The LM3875 is a high-performance audio power amplifier capable of delivering 56W of continuous average power to an 8Ω load with 0.1% THD+N from 20Hz to 20kHz.</p> <p>The performance of the LM3875, utilizing its Self Peak Instantaneous Temperature (°Ke) (SPiKe) protection circuitry, puts it in a class above discrete and hybrid amplifiers by providing an inherently, dynamically protected Safe Operating Area (SOA). SPiKe protection means that these parts are completely safeguarded at the output against overvoltage, undervoltage, overloads, caused by shorts to the supplies, thermal runaway, and instantaneous temperature peaks.</p> <p>The LM3875 maintains an excellent signal-to-noise ratio of greater than 95dB(min) with a typical low noise floor of 2.0μV. It exhibits extremely low THD+N values of 0.06% at the rated output into the rated load over the audio spectrum, and provides excellent linearity with an IMD (SMPTE) typical rating of 0.004%.</p>
APPLICATIONS <ul style="list-style-type: none">• Component or Compact Stereos• Self-Powered Speakers• Surround-Sound Amplifiers• High-End Stereo TVs	

Document 1 (suite) - Documentation technique du LM 3875

Absolute Maximum Ratings⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾

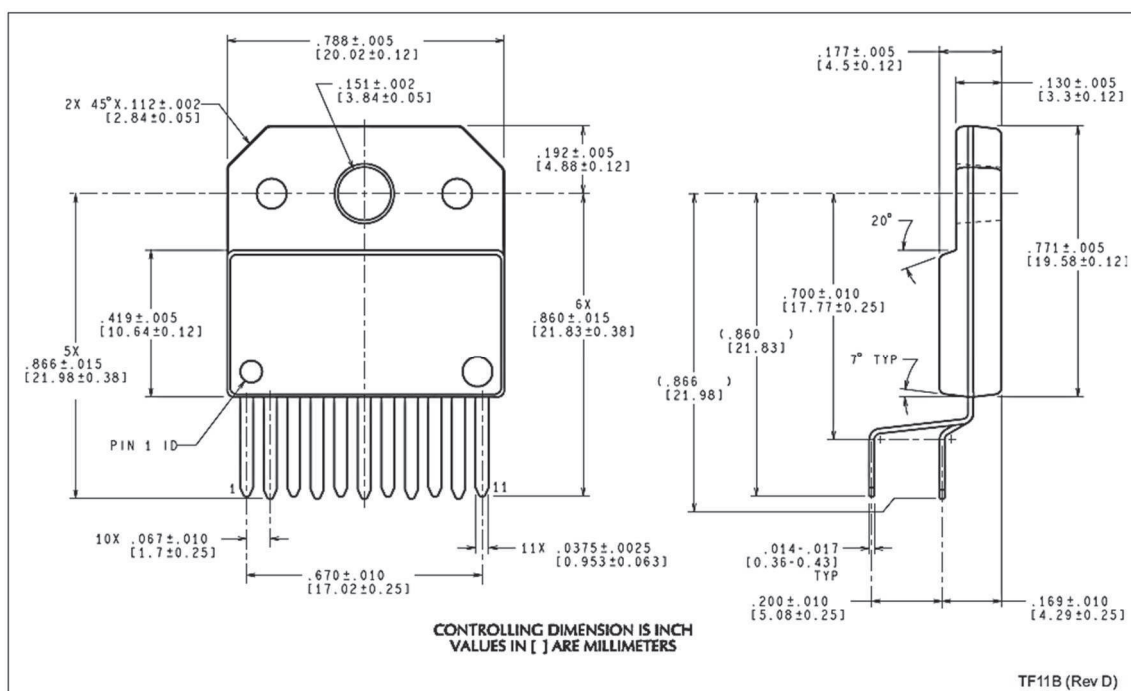
Supply Voltage $ V^+ + V^- $ (No Signal)	94V	
Supply Voltage $ V^+ + V^- $ (Input Signal)	84V	
Common Mode Input Voltage	$(V^+ \text{ or } V^-)$ and $ V^+ + V^- \leq 80V$	
Differential Input Voltage	60V	
Output Current	Internally Limited	
Power Dissipation ⁽⁴⁾	125W	
ESD Susceptibility ⁽⁵⁾	2500V	
Junction Temperature ⁽⁶⁾	150°C	
Soldering Information T package (10 seconds)	260°C	
Storage Temperature	-40°C to +150°C	
Thermal Resistance	θ_{JC}	1°C/W
	θ_{JA}	43°C/W

- (1) All voltages are measured with respect to supply GND, unless otherwise specified.
- (2) If Military/Aerospace specified devices are required, please contact the Texas Instruments Sales Office/ Distributors for availability and specifications.
- (3) Absolute Maximum Ratings indicate limits beyond which damage to the device may occur. Operating Ratings indicate conditions for which the device is functional, but do not ensure specific performance limits. Electrical Characteristics state DC and AC electrical specifications under particular test conditions which ensure specific performance limits. This assumes that the device is within the Operating Ratings. Specifications are not ensured for parameters where no limit is given, however, the typical value is a good indication of device performance.
- (4) For operating at case temperatures above 25°C, the device must be derated based on a 150°C maximum junction temperature and a thermal resistance of $\theta_{JC} = 1.0^\circ\text{C/W}$ (junction to case). Refer to the Thermal Resistance figure in the Application Information section under THERMAL CONSIDERATIONS.
- (5) Human body model, 100 pF discharged through a 1.5 kΩ resistor.
- (6) The operating junction temperature maximum is 150°C, however, the instantaneous Safe Operating Area temperature is 250°C.

Operating Ratings⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾

Temperature Range ($T_{MIN} \leq T_A \leq T_{MAX}$)	$-20^\circ\text{C} \leq T_A \leq +85^\circ\text{C}$
Supply Voltage $ V^+ + V^- $	20V to 84V

- (1) Absolute Maximum Ratings indicate limits beyond which damage to the device may occur. Operating Ratings indicate conditions for which the device is functional, but do not ensure specific performance limits. Electrical Characteristics state DC and AC electrical specifications under particular test conditions which ensure specific performance limits. This assumes that the device is within the Operating Ratings. Specifications are not ensured for parameters where no limit is given, however, the typical value is a good indication of device performance.
- (2) All voltages are measured with respect to supply GND, unless otherwise specified.
- (3) Operation is ensured up to 84V, however, distortion may be introduced from the SPIke Protection Circuitry when operating above 70V if proper thermal considerations are not taken into account. Refer to the THERMAL CONSIDERATIONS section for more information. (See SPIke Protection Response)



- Q3.** Déterminer à partir de la documentation technique de l'amplificateur de puissance :
 – une estimation de la valeur maximale de sa surface d'échange ;
 – la puissance maximale qu'il peut dissiper.
- Q4.** En déduire, dans le pire des cas, la température maximale atteinte par le composant. Que penser de la valeur obtenue ?

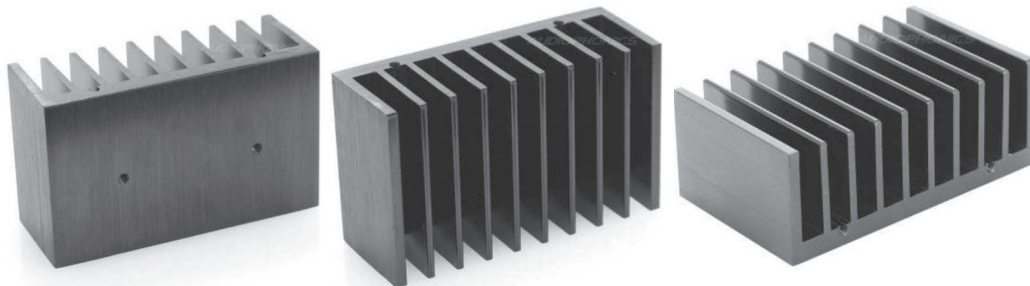
I.3 - Température maximale atteinte avec dissipateur

On peut acheter, avec un amplificateur de puissance, un dissipateur thermique adapté à ses caractéristiques.

Il s'agit d'une structure métallique en forme de peigne, constituée de plateaux parallèles entre eux et appelés ailettes.

Document 2 - Caractéristiques techniques du dissipateur thermique du LM 3875

Radiateur à ailettes en aluminium brut particulièrement adapté au montage de modules d'amplification de puissance LM 3875.



Composition	Aluminium brut couleur noir
Nombre d'ailettes de refroidissement	10
Épaisseur de la base	5,0 mm
Perçages	2 x M4
Dimensions	77 x 47 x 30 mm
Poids	120 g

Source : www.audiophonics.fr

Nous nous intéressons d'abord à une seule de ces ailettes modélisée par un parallélépipède de largeur a , de longueur ℓ et d'épaisseur e (voir **figure 3**).

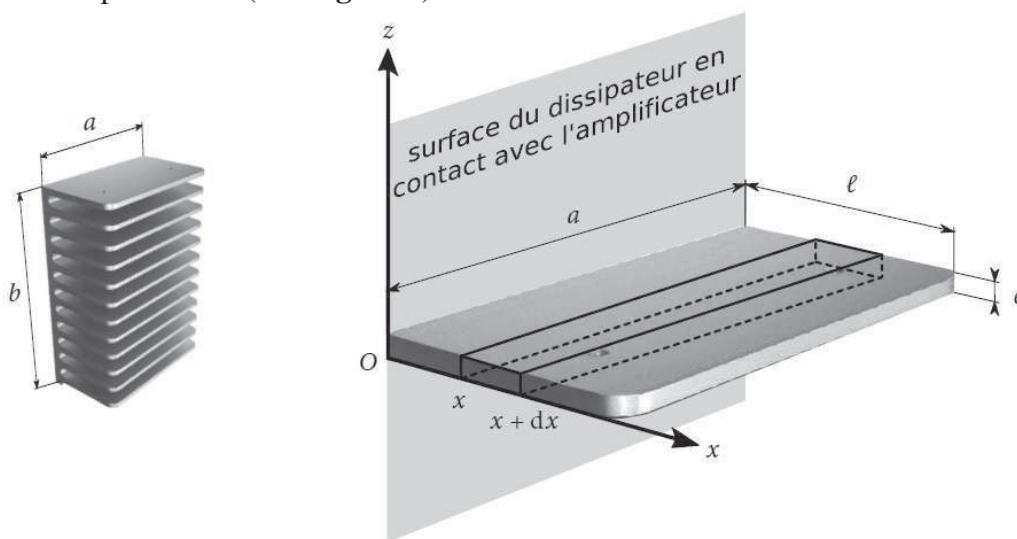


Figure 3 – Extraction et modélisation d'une ailette

- Q5.** En utilisant le **document 2** et la **figure 3**, donner les caractéristiques géométriques du dissipateur : la largeur a , la longueur ℓ et la hauteur b . Estimer l'épaisseur e à partir de la **figure 3**.
- Q6.** D'après le **document 1**, donner la valeur de la puissance moyenne \mathcal{P}_m dissipée par l'amplificateur de puissance.

L'étude est menée en respectant les hypothèses suivantes :

- le système est étudié en régime stationnaire ;
- la température d'une ailette ne dépend que de l'abscisse x et est notée $T(x)$;
- une tranche infinitésimale d'ailette d'abscisse x et de température $T(x)$ échange avec l'air extérieur, de température constante T_a , un transfert thermique conducto-convectif à travers la surface latérale infinitésimale dS . Ces échanges suivent la loi de Newton

$$d\phi = h[T(x) - T_a]dS$$

où h est un coefficient constant positif.

On note $\lambda = 200 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la conductivité thermique de l'ailette et T_0 la température de l'amplificateur de puissance. On rappelle que le coefficient de transfert conducto-convectif h vaut $15,0 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Le dissipateur étant bon conducteur thermique, sa température est égale à celle de l'amplificateur à son contact.

- Q7.** Citer, en le justifiant, une loi analogue à la loi de Newton dans un autre domaine de la physique.
- Q8.** Justifier qu'il n'est pas utile de prendre en compte toutes les faces latérales de l'ailette dans la surface élémentaire dS du transfert conducto-convectif.
- Q9.** En effectuant un bilan d'énergie interne sur la portion comprise entre x et $x + dx$ (**figure 3**), montrer que l'équation de diffusion thermique se met sous la forme

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - m^2\theta(x) = 0 \text{ avec } \theta(x) = T(x) - T_a. \quad (1)$$

En déduire l'expression littérale du coefficient m en fonction des données et déterminer sa valeur numérique.

On cherche une solution de l'équation différentielle (1) de la forme

$$\theta(x) = A[\exp(-mx) + B \exp(mx)] \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

- Q10.** Déterminer la valeur de la longueur caractéristique ℓ_c de variation de la fonction $\theta(x)$.

La solution $\theta(x)$ est-elle simplifiable compte-tenu des caractéristiques de l'ailette ?

- Q11.** Justifier les deux conditions aux limites du problème $T(0) = T_0$ et

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_\ell = h[T(\ell) - T_a].$$

- Q12.** Montrer que l'équation (1) admet pour solution

$$T(x) = T_a + (T_0 - T_a) \frac{e^{-mx} + B e^{mx}}{1 + B}$$

et exprimer B en fonction de λ , m , h et ℓ . On admet pour la suite que $B = 0,79$.

- Q13.** Déterminer l'expression littérale de la puissance \mathcal{P}_e transférée en $x = 0$ par l'amplificateur à l'ailette.
- Q14.** En tenant compte de la dissipation due à toutes les ailettes, déterminer la température T_0 de l'amplificateur. Commenter le résultat en regard de la température maximale de fonctionnement de l'amplificateur.
- Q15.** Expliquer comment l'ajout d'un ventilateur permettrait d'améliorer la dissipation thermique.

Partie II - Mesure du coefficient de transfert conducto-convectif

Afin de mesurer le coefficient h de transfert conducto-convectif entre le dissipateur thermique et l'air au repos, on étudie par interférométrie l'air au voisinage de l'une des ailettes du dissipateur. On utilise pour cela un interféromètre de Michelson constitué de deux miroirs plans \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 et d'une séparatrice idéale (SP) de dimension nulle n'introduisant aucun déphasage (**figure 4**).

L'ailette est placée sur l'un des bras d'un interféromètre de Michelson puis est portée à une température constante et uniforme $T_0 = 55\text{ °C}$, supérieure à la température ambiante $T_a = 25\text{ °C}$. L'air surmontant l'ailette est soumis à un gradient de température vertical, noté $T(z)$, et est traversé horizontalement par le flux lumineux dans l'interféromètre.

Le coefficient de conductivité thermique de l'air vaut $\lambda_a = 26.10^{-3}$ USI.

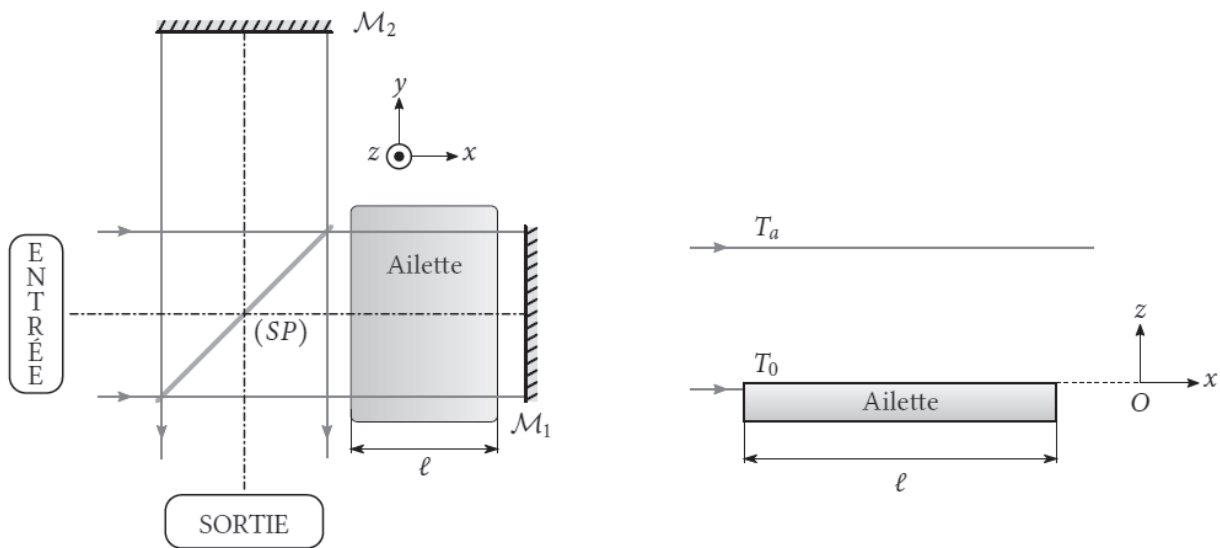


Figure 4 – Montage en vues de haut et de côté

L'indice d'un gaz dépendant de la température, celui de l'air situé au-dessus de l'ailette, se trouve modifié. On admet que l'indice n de l'air suit la relation

$$n(T) = 1 + \frac{C}{T} \text{ où } C \text{ est une constante positive.}$$

L'interféromètre de Michelson est réglé en configuration lame d'air, au contact optique. Il est éclairé par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde Λ . Afin d'éclairer au mieux toute la zone située au-dessus de l'ailette, l'éclairage incident est constitué d'un faisceau lumineux cylindrique le plus large possible.

Q16. À l'aide de tout le matériel que vous estimez nécessaire, expliquer comment éclairer l'interféromètre de façon à produire un faisceau lumineux de diamètre constant. Préciser comment procéder expérimentalement pour positionner entre eux les différents éléments utilisés.

II.1 - Température en fonction de l'ordre d'interférence

Les dimensions de l'ailette sont suffisamment grandes devant le diamètre du faisceau lumineux pour qu'aucun effet de bord ne perturbe le champ d'interférence. Tout se passe donc comme si une lame d'indice $n(T)$ et de longueur ℓ était placée sur l'un des bras de l'interféromètre. On appelle δ la différence de marche d'un rayon passant par le miroir \mathcal{M}_1 par rapport à un rayon passant par \mathcal{M}_2 .

- Q17.** Déterminer l'expression de δ en fonction de $n(T)$, $n(T_a)$ et ℓ , puis en fonction de T , T_a , C et ℓ .
- Q18.** En déduire que l'intensité lumineuse est constante sur une surface isotherme.
- Q19.** On note p l'ordre d'interférence. Exprimer p en fonction de C , ℓ , Λ , T_a et T . En déduire l'expression de p_0 , l'ordre d'interférence à la surface de l'ailette de température T_0 .
- Q20.** Montrer que la température T associée à la frange d'ordre p vaut alors :

$$T(p) = \frac{T_a}{1 - \frac{p}{p_0} \left(1 - \frac{T_a}{T_0}\right)}.$$

L'interférogramme de la **figure 5** a été obtenu en sortie du dispositif. Sa hauteur est inférieure à la taille usuelle d'un miroir de l'interféromètre. En bas de l'interférogramme, la température de l'air traversé est celle de l'ailette et au sommet, on a la température ambiante.

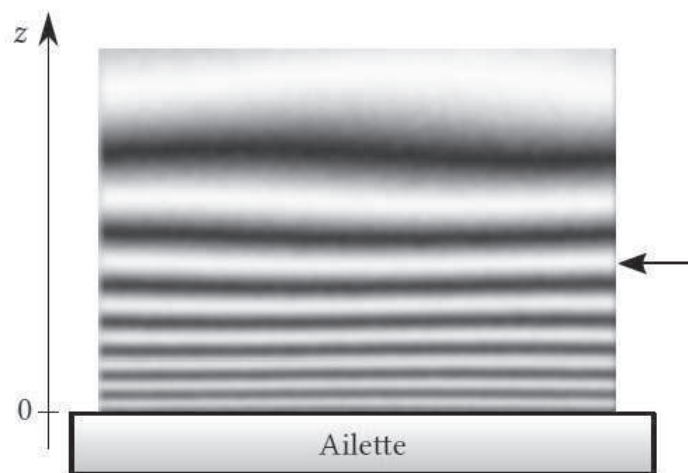


Figure 5 – Interférogramme

- Q21.** D'après le résultat de la **question Q20**, toutes les températures sont calculables dès lors que l'on connaît l'ordre d'interférence de chacune des franges. Déterminer, en le justifiant, la valeur de l'ordre d'interférence de la frange brillante repérée par une flèche sur la **figure 5**.

II.2 - Température en fonction de la cote z

On se propose enfin de vérifier que le profil de température de l'air au-dessus de l'ailette suit une loi de la forme

$$T(z) = \alpha + \beta \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \text{ où } \alpha, \beta \text{ sont des constantes positives et } \delta = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

- Q22.** Exprimer les constantes α et β en fonction de T_0 et de T_a .
- Q23.** Quelle fonction de la température $T(z)$ doit-on tracer en fonction de z pour obtenir une droite de pente $1/\delta$? Ce tracé, non demandé, a permis d'obtenir la valeur numérique de δ .
- Q24.** Déterminer l'expression littérale du flux thermique surfacique dans l'air à la surface de l'ailette. Sachant que ce flux thermique surfacique vaut aussi $h(T_0 - T_a)$ d'après la loi de Newton, en déduire l'expression littérale du coefficient h en fonction de λ_a et de δ .
- Q25.** Déterminer la valeur numérique du coefficient h et comparer sa valeur à celle donnée dans la **partie I**.

PROBLÈME 2

Physique de l'œuf

L'expression latine *ab ovo* est tirée de l'art poétique du poète latin Horace et signifie « à partir de l'œuf », donc à partir du commencement. C'est une allusion à l'œuf pondu par Léda suite à son union avec Zeus métamorphosé en cygne, œuf dont serait sortie Hélène ; Hélène qui, mariée au roi de Sparte, fut enlevée par le prince troyen Pâris, ce qui déclencha la guerre de Troie, racontée par Homère dans *l'Iliade*. Comme le remarqua Horace, Homère, poète habile, ne débuta pas son récit *ab ovo*, mais *in medias res*, en pleine action.

Dans ce problème, nous allons désobéir au conseil d'Horace et « partir de l'œuf » pour proposer quelques réflexions sur la physique de l'œuf...



Partie I - Œuf cru ou œuf dur ?

Une façon de distinguer un œuf dur d'un œuf cru sans les casser consiste à les mettre en rotation. Nous mettons en œuvre une telle expérience dans le **document 3**.

Document 3 - Rotation d'un œuf cru et d'un œuf dur

Lorsque l'on met simultanément deux œufs, l'un cru (à gauche) et l'autre dur (à droite), en rotation sur une surface plane, on fait les constatations suivantes :

- l'œuf dur, dont l'intérieur est solide et figé, tourne longtemps ; en revanche, l'œuf cru s'arrête au bout de quelques tours, à cause du frottement visqueux de la matière qu'il contient sur la coquille qui dissipe l'énergie de rotation.

- en stoppant la rotation pendant une fraction de seconde puis en libérant de nouveau les œufs, l'œuf cru se remet à tourner spontanément (entraîné par les fluides à l'intérieur dont la rotation n'a pas cessé) alors que l'œuf dur reste arrêté.



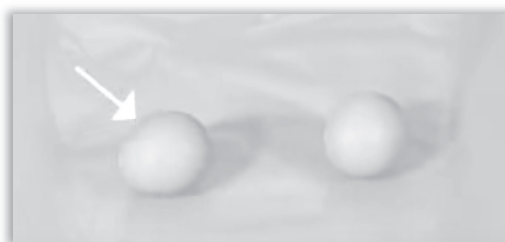
Phase A



Phase B



Phase C



Phase D



Phase E

Figure 6 – Évolution des deux œufs en rotation dans l'ordre chronologique des phases A, B, C, D, E

Source : Le kaléidoscope de la physique, Varlamov, Villain, Rigamonti, 2014

On supposera dans tout le problème que l'œuf étudié est un œuf de poule de taille moyenne.

I.1 - Phase d'immobilisation de la coquille et redémarrage

On analyse l'œuf cru et notamment l'écoulement de son contenu. Cette analyse permettra d'interpréter l'expérience citée dans le **document 3**.

On suppose que le fluide constitué de blanc et de jaune d'œuf forme un fluide newtonien et incompressible de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ .

Dans toute la suite, on prendra $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\eta = 1,0 \text{ Pl}$.

Q26. Quel est le fluide le plus proche de celui contenu dans un œuf cru, l'eau ou l'huile ? On expliquera clairement sa démarche.

On s'intéresse à la **phase C** d'arrêt du **document 3**, qui ne dure qu'une fraction de seconde. Pendant cette phase, la coquille de l'œuf est à l'arrêt alors que le fluide intérieur est encore en mouvement.

Afin de modéliser au mieux cette phase, on fait l'hypothèse que le fluide occupe seulement une hauteur h dans la coquille, si bien que nous pouvons assimiler l'écoulement à celui autour d'un cylindre de hauteur h et de rayon R .

Une vue dans l'espace et une vue de dessus sont représentées respectivement sur les **figures 7a** et **7b**.

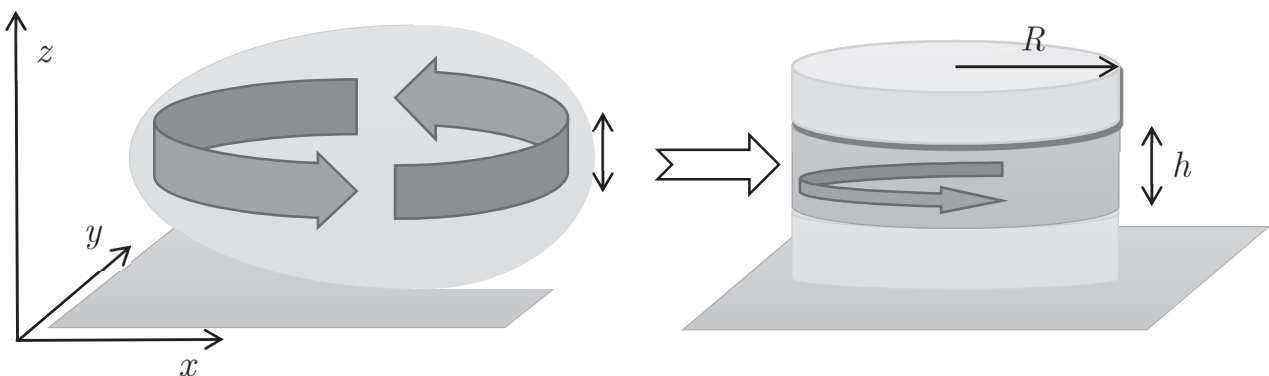


Figure 7a – Vue dans l'espace

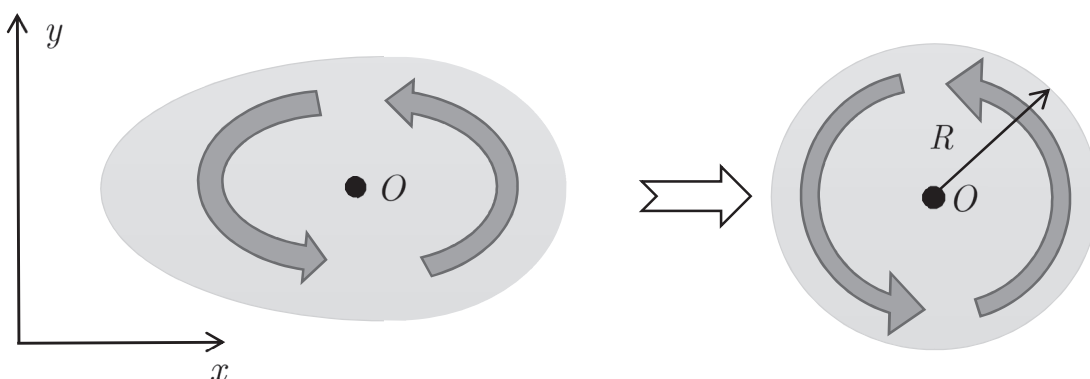


Figure 7b – Vue de dessus

Un tel écoulement est qualifié d'écoulement de Couette cylindrique. Son étude étant relativement complexe, on procèdera par analogie avec un écoulement de type Couette plan, dans lequel le fluide est décrit par un écoulement unidirectionnel :

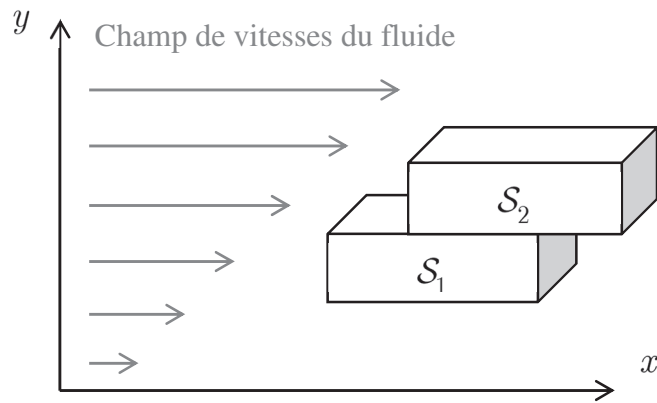


Figure 8 – Deux veines \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 dans un fluide à profil de vitesse dépendant de y

Les veines \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 représentées sont des portions de fluide newtonien de viscosité η en contact par la surface S , \mathcal{S}_2 allant plus vite que \mathcal{S}_1 . La force exercée par la veine \mathcal{S}_1 sur la veine \mathcal{S}_2 s'écrit

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \vec{u} \text{ avec } \vec{u} \text{ un vecteur unitaire.}$$

Q27. À l'aide de la **figure 8**, interpréter l'expression de cette force. Identifier le vecteur \vec{u} . Donner la dimension de η .

Dans la coquille d'œuf, le fluide a un mouvement circulaire.

On adoptera dans toute la suite un système de coordonnées cylindriques et on se placera dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Soient M et M' deux points du fluide appartenant respectivement à la veine \mathcal{S}_1 et à la veine \mathcal{S}_2 , placés à une distance $r = OM$ et $r + dr = OM'$ (**figure 9a**). Le cas d'un écoulement à vitesse angulaire non uniforme est représenté sur la **figure 9b**.

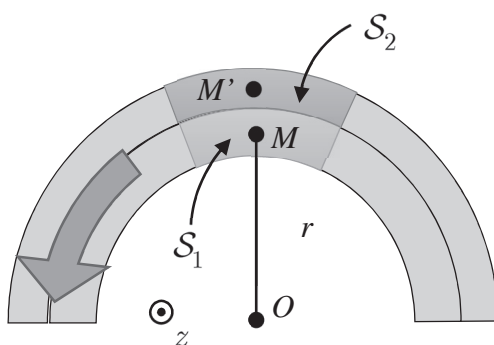


Figure 9a – Deux veines \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 dans un fluide en écoulement circulaire à l'instant initial

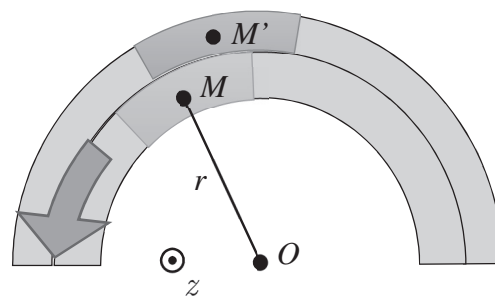


Figure 9b – Cas d'un écoulement à vitesse angulaire non uniforme $\omega(r, t)$

Q28. Donner l'expression de la vitesse du point M lié à \mathcal{S}_1 en coordonnées cylindriques en fonction de r , de ω et d'un vecteur unitaire. Comment évolue $\omega(r, t)$ avec la coordonnée r dans la **figure 9b** ?

Afin de prendre en compte le mouvement relatif des deux veines, une expression plus adaptée de la force de viscosité de la veine \mathcal{S}_1 sur la veine \mathcal{S}_2 , séparées par une interface de surface dS , s'écrit :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta r \frac{\partial(v/r)}{\partial r} dS \vec{e}_\theta.$$

Q29. À quelle condition sur les valeurs de r retrouve-t-on une expression de la force de viscosité similaire à celle d'un écoulement unidirectionnel ? Interpréter.

Q30. Exprimer le moment élémentaire $d\mathcal{M}_{Oz}(r)$ en projection sur l'axe Oz de la force $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ exercée par la veine \mathcal{S}_1 sur la veine \mathcal{S}_2 .

Q31. En déduire que le moment résultant le long de l'axe Oz exercé par le fluide sur la coquille de l'œuf s'écrit :

$$\Gamma = -2\pi h \eta R^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

On s'intéresse alors à l'instant suivant correspondant au lâcher de l'œuf, celui pour lequel on assiste au redémarrage de la rotation de l'œuf cru (**Phase D** du **document 3**).

Soit J_{Oz} le moment d'inertie de la coquille d'œuf en rotation autour de l'axe fixe Oz à la vitesse angulaire Ω .

On négligera les frottements dus à l'air environnant et au support sur lequel l'œuf est posé.

Q32. Exprimer la condition d'adhérence portant sur la vitesse angulaire $\omega(r, t)$ entre le fluide intérieur et la coquille d'œuf.

Q33. En déduire le moment cinétique L_{Oz} de la coquille par rapport à l'axe Oz en fonction de J_{Oz} et de $\omega(R, t)$.

Q34. Par application du théorème du moment cinétique, proposer une équation aux dérivées partielles reliant $\omega(r, t)$ et $\omega(R, t)$.

Q35. Expliquer à l'aide de cette équation pourquoi, contrairement à l'œuf dur, l'œuf cru redémarre sa rotation dans le même sens que celui qu'il avait dans la phase B.

I.2 - Œuf dur ou œuf cru ?

On s'intéresse à la phase de rotation des deux œufs cru et dur. D'après le **document 3**, l'œuf dur aura tendance à tourner plus longtemps que l'œuf cru, ce qui permet de distinguer un œuf dur d'un œuf cru.

Q36. En s'appuyant sur le résultat de la **question Q31**, évaluer le nombre de tours qu'effectuera l'œuf cru lors d'une mise en rotation par un opérateur. Cette question s'inscrit dans une démarche de résolution de problème. On fera apparaître clairement sa démarche de résolution, les hypothèses effectuées, l'évaluation des grandeurs d'intérêt, la validation du résultat...

Des informations utiles sont données sur la **figure 10**.

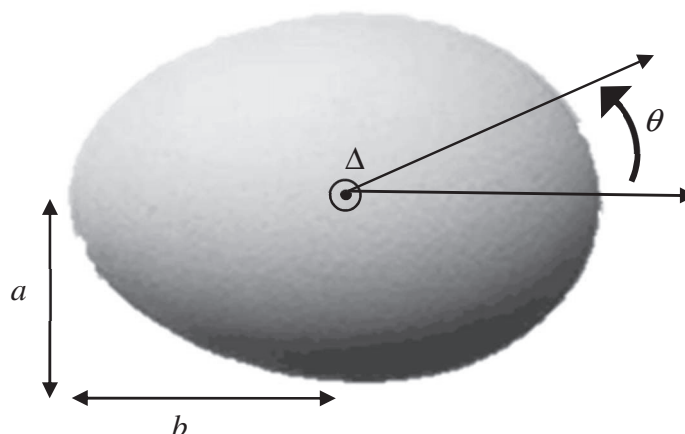


Figure 10 – Paramétrage de l'œuf cru (vue du dessus)

Le moment d'inertie de la coquille d'un œuf par rapport à l'axe Δ vertical de rotation est $J_{\Delta} = 2ma^2 + \frac{1}{6}mb^2$ avec m la masse de la coquille de l'œuf, a et b les dimensions de l'œuf.

Partie II - Œuf dur mis en rotation

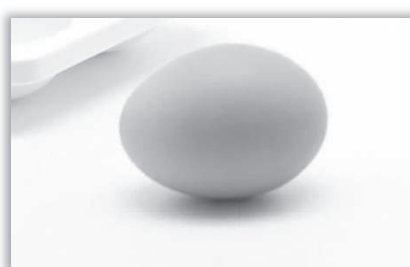
Une autre constatation encore plus étonnante est décrite dans le **document 4**.

Document 4 - L'œuf qui se dresse

Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un œuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'œuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base ! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.



a



b



c

Figure 11 – Evolution d'un œuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c

Source : Le kaléidoscope de la physique, Varlamov, Villain, Rigamonti, 2014

On souhaite établir pour l'œuf dur la condition de basculement de la position horizontale à la position verticale. On adopte le paramétrage de la **figure 12** :

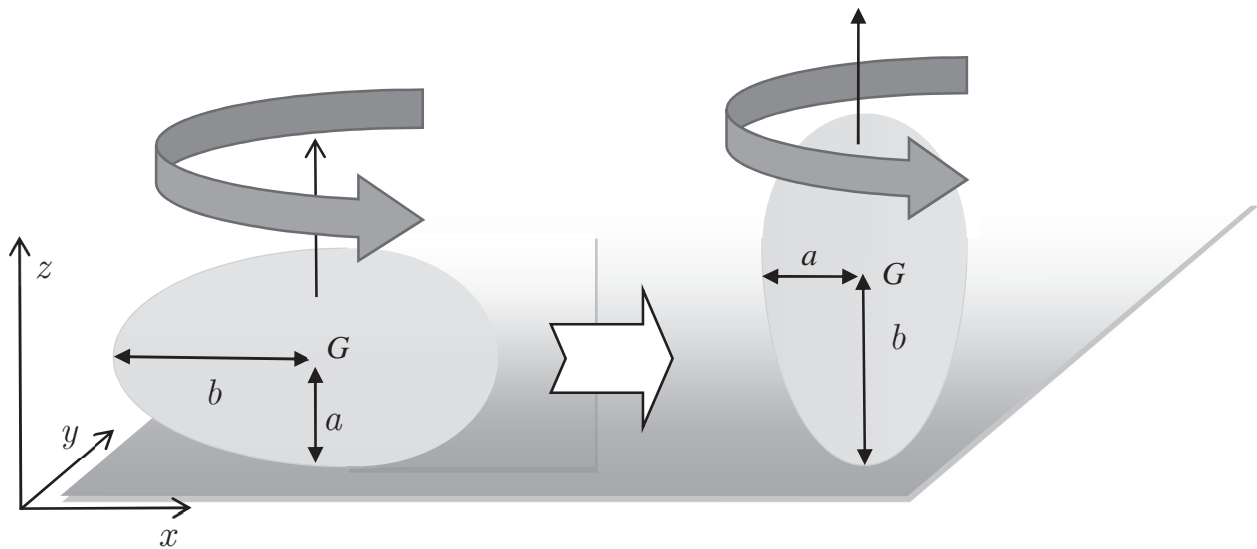


Figure 12 – Passage de la position horizontale (à gauche) à la position verticale (à droite)

On ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf.

On modélise l'œuf dur par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m , de demi petit axe a et de demi grand axe b (avec $a < b$). Le centre de masse G est au centre de l'ellipsoïde (on néglige la légère asymétrie de l'œuf).

Les moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse m par rapport à son axe de rotation Oz s'écrivent :

- $J_H = \frac{1}{5} m (a^2 + b^2)$ lorsque l'œuf tourne à l'horizontale ;
- $J_V = \frac{2}{5} m a^2$ lorsque l'œuf tourne à la verticale.

On pose Ω la vitesse de rotation de l'œuf, qu'il soit dans sa position verticale ou horizontale.

Q37. Exprimer l'énergie mécanique totale de l'œuf dans les deux positions E_{mH} et E_{mV} en fonction des données. On choisira comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur celle d'altitude nulle.

Q38. Montrer que pour $\Omega > \Omega_C$ pulsation limite, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale et assure le basculement d'une position à l'autre. On donnera l'expression de Ω_C en fonction de g , a et b .

Q39. Calculer Ω_C pour $a = 2,0 \text{ cm}$, $b = 3,0 \text{ cm}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. Commenter le résultat obtenu en utilisant les descriptions de l'expérience du **document 4**.

On suppose que le contact entre l'œuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'œuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'œuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_C + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll \Omega_C$). L'œuf se redresse et tourne alors avec une vitesse angulaire finale Ω_f que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_C + r\varepsilon$ (avec r un nombre sans dimension).

Q40. Exprimer les énergies mécaniques initiale E_{mH} et finale E_{mV} au premier ordre en ε .

- Q41.** En déduire, d'après les hypothèses, la valeur de r en fonction de a et de b . L'œuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ? Que vaudrait r pour $a \simeq b$? Commenter.
- Q42.** Calculer les moments cinétiques L_H et L_V de l'œuf par rapport à l'axe Oz avant et après son redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta L = L_V - L_H$ en fonction de Ω_C , m , a et b . L'œuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?
- Q43.** Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'œuf a subi un couple \vec{C} . Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport à l'axe Oz peut s'écrire :

$$C_z \simeq \frac{2mg(a - b)}{\Omega_c \Delta t}.$$

- Q44.** Le poids ou la réaction normale du support peuvent-ils être responsables d'un tel couple ? Y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé ?

FIN

